Избранные задачи элементарной математики

Минск 1964

В. ПЛАТОНОВ, К. АРЛЮК, В. ЗАРЕЦКИЙ,
Н. МЕТЕЛЬСКИЙ, Л. ТУТАЕВ

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ

Под общей редакцией доцента Л. ТУТАЕВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ВЫСШАЯ ШКОЛА»
МИНСК 1964

Настоящий сборник составлен с целью предложить учителям и учащимся задачи для внеклассной работы. Сборник поможет учащимся техникумов и профтехучилищ в лучшем усвоении предмета математики, его могут использовать студенты педагогических институтов при проведении педагогической практики в школе. Авторы расширили и дополнили ранее изданные «Избранные задачи элементарной математики» (Минск, 1961) с тем, чтобы сборником мог пользоваться каждый школьник, интересующийся задачами повышенной трудности, методами и способами их решения. Включенные в сборник задачи соответствуют программам указанного класса, ко всем задачам даны указания или решения.

Разделение задач по классам следует признать условным. Некоторые задачи, отнесенные к VII классу, полезно решать учащимся старших классов. Другие задачи отнесены к IX или X классу только по степени трудности их решения.

Просьба критические высказывания и пожелания направлять по адресу: Минск, Белорусский государственный университет им. В. И. Ленина, математический факультет, кафедра геометрии, доценту Тутаеву Л. К.

ЗАДАЧИ

VII КЛАСС

1. Найти все целые и положительные n, при которых дробь $\frac{3n^2-3n+20}{n-1}$ принимает целые значения.

2. Доказать, что при любых целых и положительных n число $\frac{n^4}{24}+\frac{n^3}{4}+\frac{11n^2}{24}+\frac{n}{4}$ целое и положительное.

3. Доказать, что n^5-5n^3+4n при целом n делится на 120.

4. Доказать, что если n — натуральное число, то $n(n^2+5)$ делится на 6.

5. Найти цифры x и y пятизначного числа, которое в десятичной системе записывается так: $42x4y$, если известно, что это число делится на 72.

6. Написать цифры вместо букв:

$$\begin{array}{l|l} абвгде & жзи \\ мнпр & к8л \\ стд & \\ уфч & \\ шяэе & \\ шяэе & \end{array}$$

7. Для нумерации страниц учебника потребовалось 411 цифр. Сколько страниц в учебнике?

8. Сколькими нулями оканчивается число, полученное от умножения всех чисел от 1 до 100?

9. Доказать, что сумма квадратов пяти последовательных целых положительных чисел никогда не является квадратом целого числа.

10. Доказать, что у числа, являющегося точным квадратом, произведение двух последних цифр четно.

11. Доказать, что если между цифрами числа 1331 написать по равному количеству нулей, то получится точный куб.

12. Доказать, что нет целых чисел, которые от перестановки начальной и конечной цифры увеличивались бы в 5, в 6 или в 8 раз.

13. Найти такое трехзначное число, удвоив которое мы получим число, выражающее количество цифр, необходимое для написания всех последовательных целых чисел от 1 до этого трехзначного числа.

14. Найти наименьшее число, записываемое одними единицами, которое делилось бы на число 33...3 (сто троек).

15. Доказать, что если разность, полученная от вычитания числа, выраженного тремя последними цифрами данного числа, из числа, выраженного всеми остальными цифрами (или наоборот), равна 0 или делится на 7, на 11, на 13, то все данное число делится соответственно на 7, или на 11, или на 13. (Признак делимости на 7, 11, 13.)

16. Найти признак делимости на 7 числа, записанного в восьмеричной системе.

17. Найти признак делимости на 9 числа, записанного в восьмеричной системе.

18. Найти все простые числа p такие, что p^2+8 — простое число.

19. Доказать, что квадрат любого простого числа, кроме двух и трех, при делении на 24 дает в остатке 1.

20. Доказать, что всякое простое число при делении на 30 дает в остатке снова простое число.

21. 2^p-1 и 2^q-1 взаимно просты. Доказать, что p и q — так же взаимно просты. Обратно, если p и q — взаимно просты, то 2^p-1 и 2^q-1 взаимно просты.

22. Доказать, что: $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{99}{100}<\frac{1}{10}$.

23. Определить несократимую дробь, которая не изменяет своей величины от прибавления к числителю 21, а к знаменателю 28.

24. Два одинаковых катера, имеющие одинаковую скорость в стоячей воде, проходят по двум рекам одинаковое расстояние по течению и возвращаются обратно. В какой реке на эту поездку потребуется больше времени:

в реке с быстрым течением или в реке с медленным течением?

25. Решить систему n уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} \dfrac{x_1}{a_1} = \dfrac{x_2}{a_2}, \\ \dfrac{x_2}{a_2} = \dfrac{x_3}{a_3}, \\ \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \dfrac{x_{n-1}}{a_{n-1}} = \dfrac{x_n}{a_n}, \\ x_1 + x_2 + x_3 + \ \ldots \ + x_n = A. \end{cases}$$

26. Узнать, через сколько минут после того, как часы показывали 9 часов, минутная стрелка догонит часовую.

27. В каком году родились люди, которым в 1958 году исполнилось столько лет, какова сумма цифр года их рождения?

28. В треугольнике ABC высота h_a составляет половину биссектрисы внешнего угла этого треугольника при вершине A. Найти разность углов B и C.

29. Тысяча точек являются вершинами выпуклого тысячеугольника, внутри которого расположено 500 точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Многоугольник разрезается на треугольники, вершинами которых являются только данные 1500 точек. Сколько получится треугольников?

30. Точки, симметричные точке пересечения высот треугольника относительно трех его сторон, лежат на окружности, описанной около этого треугольника.

31. На плоскости проведена замкнутая ломаная линия, все звенья которой имеют длину l и любые два соседних звена взаимно перпендикулярны. Доказать, что число звеньев кратно 4.

32. Доказать, что прямые, соединяющие последовательные центры квадратов, построенных на сторонах параллелограмма и примыкающих к ним извне, образуют квадрат.

33. Построить треугольник по вершине, точке пересечения высот и середине противоположной стороны.

34. Около правильного треугольника описать квадрат, имеющий с ним общую вершину.

35. В данную окружность вписать трапецию, если известна ее боковая сторона и расстояние от центра до точки пересечения диагоналей.

36. По высоте, опущенной из вершины прямого угла, и разности острых углов построить прямоугольный треугольник.

VIII КЛАСС

1. Доказать, что

$$ab(a+b-2c)+bc(b+c-2a)+ac(a+c-2b)\geqslant 0$$

при $a>0, \quad b>0, \quad c>0$.

2. Доказать, что из равенства

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{a+b+c}$$

вытекает равенство

$$\frac{1}{a^n}+\frac{1}{b^n}+\frac{1}{c^n}=\frac{1}{a^n+b^n+c^n},$$

если n нечетное.

3. Доказать, что выражение

$$\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)(n-1)!$$

делится на n, если n — число нечетное.

4. Натуральные числа a и b взаимно просты. Доказать, что наименьший общий делитель чисел $a+b$ и a^2+b^2 равен 1 или 2.

5. Доказать, что многочлены:

$$a^5+4a^3+3a \text{ и } a^4+3a^2+1$$

не имеют общих делителей ни при каком целом a.

6. Доказать, что уравнение

$$2x^2-5y^2=7$$

не имеет решений в целых числах.

7. Решить уравнение

$$x^3+2\sqrt{3}\,x^2+3x+\sqrt{3}-1=0.$$

8. Определить a так, чтобы сумма квадратов корней уравнения $x^2+(2-a)x-a-3=0$ была наименьшей.

9. Найти действительные решения системы уравнений:

$$\begin{cases} x^4 + y^4 = 17 \\ x + y = 3. \end{cases}$$

10. Доказать тождество:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2} + \ldots + \frac{1}{2k}.$$

11. Если n — произвольное число, то существует число, кратное n, записанное с помощью двоек и нулей. Доказать.

12. Вычеркнуть 100 цифр из числа: 123456789101112 . . . . . 9899100 так, чтобы полученное число было наибольшим.

13. Решить уравнение:

$$|x+1| - |x| + 3|x-1| - 2|x-2| = |x+2|.$$

14. Если многочлен с целыми коэффициентами

$$f(x) = a_0 x^3 + a_1 x^2 + a_2 x + a_3$$

при $x = 0$ и $x = 1$ принимает нечетное значение, то он не имеет целых корней. Доказать.

15. Найти положительное четырехзначное число, кратное 7 и представляющее собой сумму куба и квадрата некоторого целого числа.

16. Дано: $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} + \frac{c^2+a^2-b^2}{2ac} + \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = 1.$

Доказать, что две из этих дробей равны $+1$, а одна из них -1.

17. Построить такой равнобедренный треугольник, чтобы периметр всякого вписанного прямоугольника был бы величиной постоянной.

18. Стороны одного треугольника равны медианам второго треугольника. Найти отношение площадей этих треугольников.

19. Если все квадраты, вписанные в треугольник так, что две вершины расположены на стороне треугольника, а две другие вершины на двух других сторонах треугольника, равны между собой, то треугольник равносторонний. Доказать.

20. Если произведение диагоналей четырехугольника равно сумме произведений противоположных сторон, то около него можно описать окружность. Доказать.

21. На одной стороне треугольника дана точка A. Требуется провести через нее прямую так, чтобы она разделила площадь треугольника на две равные части.

22. Из точки O внутри треугольника ABC на его стороны опущены перпендикуляры t_a, t_b, t_c. Доказать, что $\frac{t_a}{h_a}+\frac{t_b}{h_b}+\frac{t_c}{h_c}=1$. ($h_a$, h_b, h_c — высоты $\triangle ABC$.)

23. В равнобедренном треугольнике радиус описанной окружности R, а радиус вписанной — r.

Найти стороны треугольника.

24. Найти на стороне данного треугольника точку так, чтобы перпендикуляр, опущенный из нее на другую сторону, делил площадь данного треугольника пополам.

25. В разностороннем треугольнике стороны пропорциональны медианам. Найти коэффициент пропорциональности.

26. a, b и c — стороны треугольника ABC; R — радиус описанного круга; l, m и n — расстояния центра тяжести от сторон треугольника. Доказать, что $R=\frac{ab+bc+ac}{6(l+m+n)}$.

27. Через точку внутри квадрата провести прямую, отсекающую от него фигуру с наименьшей площадью.

28. Доказать, что нет равнобедренного треугольника, у которого вписанная окружность делила бы медиану на три равные части.

29. Построить прямоугольную трапецию так, чтобы разность между удвоенным квадратом большей диагонали и квадратом меньшей диагонали равнялась a^2 (a — данный отрезок).

30. Построить треугольник, зная, что длины сторон его составляют арифметическую прогрессию, биссектриса, проведенная к средней стороне, равна l и угол, лежащий против биссектрисы, равен α.

31. В данный прямоугольник вписать ромб со стороной a (вершины ромба принадлежат разным сторонам прямоугольника).

32. Из пяти данных окружностей любые четыре проходят через одну точку. Доказать, что найдется точка, через которую проходят все пять окружностей.

33. Если трапеция описана около окружности, то прямая, соединяющая точки касания оснований, и прямая, соединяющая точки касания боковых сторон, проходят через точку пересечения диагоналей.

34. В шахматном турнире участвовало 8 человек, сыгравших по одной партии с каждым из остальных участников. Все они набрали различное количество очков. Шахматист, занявший второе место, набрал столько же очков, сколько четыре последних вместе. Как сыграли между собой шахматисты, занявшие третье и седьмое место?

35. Дан произвольный выпуклый четырехугольник: 1) вписать в него квадрат и 2) описать около него квадрат.

36. Доказать, что площадь прямоугольника, построенного на гипотенузе прямоугольного треугольника, равна сумме площадей прямоугольников, подобных этому прямоугольнику; гипотенуза и катеты — сходственные стороны прямоугольников.

37. Если сумма расстояний между серединами противоположных сторон выпуклого четырехугольника равна его полупериметру, то четырехугольник — параллелограмм. Доказать.

38. Через точку внутри угла провести прямую, отсекающую от этого угла треугольник с наименьшей площадью.

39. Найти точку, из которой видны под равными углами три последовательных отрезка AB, BC, CD одной прямой.

40. Построить трапецию, зная углы при основании и диагонали.

41. Круг радиуса R катится внутри круга радиуса $2R$ (без скольжения). Какие линии описывают точки катящегося круга?

42. При помощи одной линейки провести прямую, параллельную основаниям данной трапеции так, чтобы ее отрезок, заключенный внутри трапеции, делился диагоналями на три равные части.

43. Стороны любого треугольника есть стороны правильных треугольников, примыкающих к данному извне. Доказать, что точки пересечения высот этих треугольников — вершины правильного треугольника.

44. Дана прямая и точка на ней. Восстановить из этой точки перпендикуляр к прямой с помощью одной двухсторонней линейки (линейка с параллельными краями).

45. Пусть a, b, c, d — величины последовательных сторон четырехугольника, около которого можно описать окружность; l и f — величины диагоналей. Доказать, что $lf = ac + bd$.

46. На окружности, описанной около равностороннего треугольника ABC, взята точка M. Доказать, что наибольший из отрезков MA, MB и MC равен сумме двух остальных.

47. Доказать, что среди всех прямоугольных треугольников с общей гипотенузой равнобедренный треугольник имеет наибольший радиус вписанной окружности.

48. Если внутренние касательные двух окружностей взаимноперпендикулярны, то отрезок, отсекаемый внутренними касательными на внешней касательной, равен сумме радиусов этих окружностей. Доказать.

49. Найти площадь треугольника, образованного двумя внутренними и одной внешней касательной двух окружностей, если внутренние касательные взаимно перпендикулярны.

50. Отрезок длиной a разделить на 2, 3, ..., n частей, используя циркуль постоянного размера a и линейку.

51. Дана окружность, центр которой не указан, и точка M вне ее. Опустить из этой точки перпендикуляр на заданный диаметр с помощью одной линейки.

IX КЛАСС

1. Найти последние две цифры числа 7^{9^9}.

2. Доказать, что число вида $(10^n + 10^{n-1} + \ldots + 1)\cdot(10^{n+1} + 5) + 1$ есть точный квадрат.

3. Найти трехзначное число, являющееся точным квадратом N^2, и такое, чтобы произведение его цифр было равно $N - 1$.

4. Доказать, что если n — четное число, то число $13^n + 6$ делится на 7.

5. Доказать, что при любом натуральном n имеет место неравенство

$$\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 1.$$

6. Даны n различных положительных чисел a_1, a_2, ..., a_n. Из них составляют всевозможные суммы с любым числом слагаемых (от 1 до n). Доказать, что из этих сумм найдется по крайней мере $\frac{n(n+1)}{2}$ попарно неравных.

7. Найти двузначное число, равное неполному квадрату суммы его цифр.

8. Число 531441 надо разбить на такие числа, чтобы первое из них было 1, второе — в k раз больше, третье — в k раз больше суммы первых двух, четвертое — в k раз больше суммы первых трех и т. д. Последнее число — в k раз больше суммы всех предыдущих. Найти множитель k и число слагаемых, если известно, что оно не менее четырех.

9. Доказать, что при всяком целом $n > 1$

$$1 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{3n+1} < 2.$$

10. Определить целую часть числа

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}}.$$

11. Доказать, что

$$(1+x_1)\cdot(1+x_2)\ldots\cdot(1+x_n) \geqslant 1 + x_1 + \ldots + x_n,$$

при условии, что все числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ одного знака и больше, чем — 1.

12. Найти сумму

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{5}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2n-1}+\sqrt{2n+1}}.$$

13. При каком условии радикал $\sqrt{m+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}$ можно представить в виде суммы трех радикалов $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$, где x, y, z — положительные рациональные числа?

14. Показать, что если $a > b > 0$, то разность между средним арифметическим и средним геометрическим этих чисел находится между $\frac{(a-b)^2}{8a}$ и $\frac{(a-b)^2}{8b}$.

15. Уничтожить иррациональность в знаменателе дроби

$$\frac{59}{1+3\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{4}}.$$

16. Доказать, что выражение

$$y = (x+2\sqrt{x-1})^{-\frac{1}{2}} + (x-2\sqrt{x-1})^{-\frac{1}{2}}$$

равно $\frac{2}{2-x}$ при $1 \leqslant x < 2$ и $\frac{2\sqrt{x-1}}{x-2}$ при $x > 2$.

17. Показать, что для того, чтобы дробь $\frac{ax^2+bx+c}{a_1x^2+b_1x+c_1}$

имела значение, не зависящее от x, необходимо и достаточно соблюдение условия

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}.$$

18. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y = \frac{2x^2 + 6x + 6}{x^2 + 4x + 5}.$$

19. Доказать, что трехчлен: $x^2 + 5x + 16$ ни при каком целом значении x не делится на 169.

20. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y\sqrt{xy} = 336 \\ y^2 + x\sqrt{xy} = 112. \end{cases}$$

21. Решить уравнение:

$$\sqrt[4]{8 - x} + \sqrt[4]{89 + x} = 5.$$

22. Решить уравнение:

$$\sqrt{a - \sqrt{a + x}} = x.$$

23. Решить уравнение

$$\frac{\sqrt[p]{b + x}}{x} - \frac{\sqrt[p]{x}}{a} + \frac{\sqrt[p]{x + b}}{b} = 0.$$

24. Решить уравнение

$$(a^2 - a)^2 (x^2 - x + 1)^3 = (a^2 - a + 1)^3 (x^2 - x)^2.$$

25. Найти все действительные решения уравнения:

$$\frac{36}{\sqrt{x - 2}} + \frac{4}{\sqrt{y - 1}} = 28 - 4\sqrt{x - 2} - \sqrt{y - 1}.$$

26. Дана окружность, диаметр которой AB, и касательная AX. Требуется найти на окружности такую точку M, чтобы расстояние от этой точки до касательной равнялось бы расстоянию от этой же точки до другого конца диаметра B.

27. Доказать, что если стороны $\triangle ABC$ связаны соотношением $b^2 + c^2 = 5a^2$, то две медианы, выходящие из вершин B и C, взаимно перпендикулярны.

28. Не прибегая к делению радиуса в среднем и крайнем отношении, найти построением сторону a_{10} правильного десятиугольника, вписанного в круг радиуса R.

29. Дана четверть круга AOB (центр в O) радиуса R и полуокружность с центром в O_1, построенная на AO как на диаметре (внутри данной четверти круга). Радиус этой полуокружности, перпендикулярный к OA, встречает окружности O и O_1 в точках M и N. Найти периметр и площадь криволинейной трапеции $MNOB$.

30. На сколько частей делят плоскость l прямых общего положения (прямые находятся в общем положении, если среди них нет параллельных и никакие три из этих прямых не пересекаются в одной точке)?

31. Доказать, что если плоский многоугольник имеет несколько осей симметрии, то они пересекаются в одной точке.

32. На прямой дано p отрезков. Доказать, что если каждые два из них имеют общую точку, то существует по крайней мере одна точка, принадлежащая всем отрезкам.

33. Доказать, что если фигура имеет два центра симметрии, то она имеет бесчисленное количество центров симметрии.

34. В окружности радиуса R проведены хорды $AB = c$ и $BC = a$. Определить длину хорды AC.

35. На катетах и гипотенузе прямоугольного треугольника, как на диаметрах, построены полуокружности: две первые — вне треугольника, третья по ту сторону от гипотенузы, где лежит треугольник. Доказать, что сумма площадей двух луночек, заключенных между каждой из меньших окружностей и большей окружностью, равна площади данного треугольника.

36. Окружность радиуса, равного высоте правильного треугольника, катится по одной из сторон этого треугольника так, что остальные стороны высекают из окружности некоторую дугу. Доказать, что дуга при любом положении окружности равна 60°.

37. Построить циркулем и линейкой выражение

$$x = \sqrt[4]{a^4 + b^4}.$$

X КЛАСС

1. Доказать, что если n — целое число, большее 2, то

$$2^{\frac{1}{2}n(n-1)} > n!$$

2. Если x и y — целые, взаимно простые числа, то наибольший общий делитель чисел $x - y$ и

$$x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots + xy^{n-2} + y^{n-1}$$

есть делитель числа n. Доказать.

3. Найти основание всех таких систем счисления, в которых любая нечетная степень всякого натурального числа оканчивается той же цифрой, что и само это число.

4. Найти такие вещественные числа a, b и p, q, чтобы равенство $(2x-1)^{20} - (ax+b)^{20} = (x^2+px+q)^{10}$ выполнялось при любых x.

5. Если p и q — простые числа «близнецы» ($p - 1 = q + 1$), то $p^p + q^q$ кратно $p + q$. Доказать.

6. Доказать, что при любых натуральных числах k и n выражение $k^{n+2} + (k+1)^{2n+1}$ делится на $k^2 + k + 1$.

7. Доказать неравенство:

$$k(1 + a^{2k}) - a^k \geqslant a^{2k-1} + a^{2k-2} + \ldots + a^2 + a,$$

если $a > 0$ и k — целое положительное число.

8. Замечено, что среднее арифметическое k первых цифр числа π стремится при возрастании числа k к 4,5. Доказать, что при этом число 10 минус π также обладает этим свойством.

9. Доказать, что в любом тридцатизначном числе, в записи которого участвуют только цифры 1, 2 и 3, можно найти две тройки из подряд стоящих цифр такие, что образованные ими трехзначные числа равны.

10. Сколько цифр имеет число

$$1 + 10^4 + \frac{10^4(10^4-1)}{1\cdot 2.} + \frac{10^4(10^4-1)(10^4-2)}{1\cdot 2\cdot 3.} + \ldots + 1$$

[всего $(10^4 + 1)$ членов]?

11. Доказать, что выражение $4^n + 15^n - 1$, где n — натуральное число, делится на 9.

12. Доказать, что сумма $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$ при любом целом n есть квадрат целого числа.

13. Дано $6n$-значное число, делящееся на 7. Доказать, что число, полученное из него перестановкой последней цифры на место начальной, также делится на 7.

14. Доказать, что

$$\sqrt[n]{n!} \geqslant \sqrt{n}.$$

15. Доказать невозможность такого треугольника, в котором одновременно и стороны и углы составляли бы арифметическую прогрессию.

16. Вычислить сумму:

$$\frac{1}{\cos x \cdot \cos y} + \frac{1}{\cos y \cdot \cos z} + \ldots + \frac{1}{\cos t \cdot \cos u} + \frac{1}{\cos u \cdot \cos v},$$

если дано, что $x, y, z \ldots, t, u, v$ образуют арифметическую прогрессию, разность которой равна r.

17. Доказать, что если квадраты сторон треугольника составляют арифметическую прогрессию, то треугольник, сторонами которого служат медианы данного, подобен данному.

18. Стороны треугольника составляют геометрическую прогрессию. Доказать, что такой треугольник подобен треугольнику, сторонами которого служат высоты данного.

19. Даны десять чисел $s_1 \leqslant s_2 \leqslant \ldots \leqslant s_{10}$, которые являются попарно взятыми суммами пяти чисел $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_5$. Выразить числа x через числа s.

20. Доказать, что $\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2$,

где a_i, b_i — любые действительные числа.

21. Дана возрастающая последовательность целых чисел $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$, для которой $a_0 = 0$, $a_1 = 1$, а каждое $a_i (i = 2, 3, 4, \ldots, n)$ является наименьшим числом, не образующим арифметической прогрессии ни с какими двумя предыдущими числами последовательности. Доказать, что общий член a_k последовательности есть число, которое получается из номера k, если его записать в двоичной, но прочесть в троичной системах исчисления.

22. Дана арифметическая прогрессия, члены которой — целые положительные числа. Известно, что в этой прогрессии есть член, являющийся полным квадратом. Доказать, что прогрессия содержит множество таких членов.

23. Доказать, что $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$ не могут быть членами одной арифметической прогрессии.

24. Канал имеет прямоугольный поворот. Какой максимальной площади прямоугольный плот может пройти по этому каналу, если ширина канала h?

25. Основания четырех логарифмов одного и того же числа образуют геометрическую прогрессию со знаменателем, равным этому числу. Найти эти логарифмы, если известно, что сумма первых двух из них равна сумме остальных.

26. Доказать тождество:

$$\log_a N \cdot \log_b N + \log_b N \cdot \log_c N + \log_c N \cdot \log_a N = \frac{\log_a N \cdot \log_b N \cdot \log_c N}{\log_{abc} N}.$$

27. Решить неравенство:

$$4^x - 2 \cdot 5^{2x} < 10^x.$$

28. Решить уравнение:

$$\log_{\cos x} \sin x + \log_{\sin x} \cos x = 2.$$

29. Найти предел выражения:

$$\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3}}}}}\ldots$$

30. Решить систему:

$x^y = y^x$, $a^x = b^y$, где $a > 0$, $b > 0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$.

31. Доказать, что $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7} - \sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}$ — рациональное число.

32. Решить уравнение

$$(\sqrt{2+\sqrt{3}})^x + (\sqrt{2-\sqrt{3}})^x = 8.$$

33. Доказать, что если

$$\frac{x(y+z-x)}{\lg x} = \frac{y(x+z-y)}{\lg y} = \frac{z(x+y-z)}{\lg z},$$

то

$$x^y y^x = z^v y^z = x^z z^x.$$

34. Решить уравнение:

$$\frac{x^2 - 10x + 15}{x^2 - 6x + 15} = \frac{3x}{x^2 - 8x + 15}.$$

35. Доказать, что $|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2(|x|^2 + |y|^2)$, где x, y — комплексные числа.

36. На сторонах треугольника ABC вне его построены квадраты, имеющие центры соответственно в точках A_1, B_1, C_1. Доказать, что, сдвигая параллельно отрезки AA_1, BB_1, CC_1, можно получить треугольник со сторонами — этими отрезками.

37. На плоскости дано n точек. Известно, что среди любых трех из них имеются две, расстояние между которыми не больше 1. Доказать, что на плоскость можно положить два круга радиуса 1, которые закроют все эти точки.

38. На плоскости даны n точек, расположенных так, что на каждой прямой, соединяющей две из этих точек, лежит по крайней мере еще одна из них. Доказать, что все n точек лежат на одной прямой.

39. Каково наибольшее число точек пересечения диагоналей выпуклого n-угольника, лежащих внутри него?

40. Треугольник разбит на меньшие треугольники так, что последние примыкают друг к другу либо по целой стороне, либо в вершинах. Вершины основного треугольника занумерованы цифрами 1, 2, 3. Вершины меньших треугольников занумерованы так, что вершинам, лежащим на сторонах исходного треугольника, приписан номер любой из вершин, примыкающих к данной стороне. Нумерация внутренних вершин произвольна. Доказать, что среди малых треугольников найдется по крайней мере один, занумерованный всеми тремя цифрами.

41. На плоскости даны n точек, не все из которых лежат на одной прямой. Доказать, что среди прямых, соединяющих всевозможные пары этих точек, обязательно будет не менее n различных.

42. Чему равно общее число членов в разложении

$$(a+b+d)^n?$$

43. Показать, что средний член разложения $(a+x)^{2n}$ равен

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)\cdot 2^n a^n x^n}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n}.$$

44. Доказать, что при любом целом n $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 3$.

45. В шахматном турнире принимали участие учащиеся двух классов, причём учащихся одного класса было в 10 раз больше, чем учащихся другого класса. Каждый участник турнира встречался с любым другим только один раз.

При подведении итогов турнира оказалось, что учащиеся класса с бо́льшим числом участников набрали вместе в 4,5 раза больше очков, чем все учащиеся другого класса.

Сколько очков набрали учащиеся класса с меньшим числом участников?

46. Доказать, что

$$1-3C_{4n}^1+3^2C_{4n}^2-3^3C_{4n}^3+\ldots-3^{4n-1}C_{4n}^1+3^{4n}=$$
$$=1-5C_{2n}^1+5^2C_{2n}^2-5^3C_{2n}^3+\ldots-5^{2n-1}C_{2n}^1+5^{2n}.$$

47. Доказать, что если в треугольнике стороны удовлетворяют соотношению

$$\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c},$$

то один из углов его равен 60°.

48. Решить уравнение:

$$26\sin^2 x^2+12\cos 2x+5\sin 2x=13.$$

49. Решить неравенство:

$$\frac{\sin 2x-\cos 2x+1}{\sin 2x+\cos 2x-1}>0.$$

50. В треугольнике его углы α и β связаны соотношением:

$$\cos\alpha+\cos\beta-\cos(\alpha+\beta)=\frac{3}{2}.$$

Доказать, что треугольник правильный.

51. Углы треугольника связаны соотношением:

$$\sin\alpha=2\sin\beta\cdot\cos\gamma.$$

Доказать, что треугольник равнобедренный.

52. Доказать, что $a\sin\alpha+b\cos\alpha$ не зависит от α, если $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{a}{b}$.

53. Доказать, что если число α иррационально, то функция $\cos\alpha x+\cos x$ не является периодической.

54. Доказать, что в четырехугольнике, вписанном в окружность, имеет место равенство:

$$\sin A:\sin B=(ad+bc):(ab+cd),$$

где A и B — два соседних угла, стороны a и b примыкают к углу A; c и d — к углу C.

55. Доказать, что в тупоугольном треугольнике сумма квадратов синусов внутренних углов меньше двух.

56. Сколько корней имеет уравнение:

$$\sin x=\frac{x}{100}?$$

57. Найти действительные решения уравнения

$$\sin^n x+\frac{1}{\cos^m x}=\cos^n x+\frac{1}{\sin^m x},$$

в котором m и n обозначают положительные нечетные числа.

58. Доказать неравенство $\cos\alpha + \alpha \cdot \sin\alpha > 1$, где

$$0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

59. По полю проходит прямолинейная дорога. Человек, стоящий на дороге в точке A, может двигаться по полю со скоростью не более 3 *км/час* и по дороге со скоростью не более 6 *км/час*.

Найти геометрическое место точек, в которые он может попасть за 1 час.

60. Доказать, что наименьший объем имеет описанный около шара конус, высота которого вдвое больше диаметра шара.

61. Доказать, что объем правильной пирамиды всегда меньше куба ее бокового ребра.

62. Доказать, что не существует многогранника с нечетным числом граней, все грани которого являются многоугольниками с нечетным числом сторон.

63. Доказать, что радиус шара, вписанного в многогранник, равен $\frac{3V}{S}$, где V — объем многогранника, а S — его поверхность.

64. В данный треугольник вписать параллелограмм наибольшей площади с данным острым углом так, чтобы две вершины параллелограмма лежали на основании, а две другие — на боковых сторонах.

65. Около конуса, радиус основания которого равен R, а угол между образующей и основанием равен α, расположены n равных шаров, каждый из которых касается двух соседних, боковой поверхности конуса извне и плоскости его основания.

Найти радиус шара.

66. Какому условию должны удовлетворять ребра тетраэдра, чтобы существовал шар, касающийся всех его ребер.

67. Доказать, что сечение параллелепипеда плоскостью не может быть правильным пятиугольником.

68. При каком условии можно получить тетраэдр сгибанием по прямым листа, имеющего форму треугольника?

Доказать, что из 12 углов граней такого тетраэдра различных может быть только три и сумма трех таких различных углов равна двум прямым.

69. Дана треугольная пирамида. Доказать, что

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} + \frac{1}{h_4},$$

где R — радиус шара, вписанного в пирамиду, h_1, h_2, h_3, h_4 — длины перпендикуляров, опущенных из вершин пирамиды на противоположные грани.

70. Вычислить плоский угол при вершине правильной четырехугольной пирамиды, если известно, что центр вписанного и описанного шаров совпадают.

71. Три шара радиуса R касаются одной и той же плоскости и каждый из них касается двух других.

Найти радиус шара, касающегося плоскости и трех данных шаров.

72. Из всех четырехугольников с одними и теми же сторонами четырехугольник, около которого можно описать окружность, имеет наибольшую площадь. Доказать.

73. Решить уравнение:

$$x^2 + \frac{25x^2}{(5+2x)^2} = \frac{74}{49}.$$

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

VII КЛАСС

1. $\frac{3n^2-3n+20}{n-1}=\frac{3n(n-1)+20}{n-1}=3n+\frac{20}{n-1}$.

Следовательно, дробь будет целым числом тогда, когда $\frac{20}{n-1}$ — целое число.

$n=2, 3, 5, 6, 11, 21$.

2. $\frac{n^4}{24}+\frac{n^3}{4}+\frac{11n^2}{24}+\frac{n}{4}=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{24}$.

3. $n^5-5n^3+4n=n(n^2-1)(n^2-4)=(n-2)(n-1)\times$
$\times n(n+1)(n+2)$.

Из пяти последовательных чисел одно наверное делится на 5, по крайней мере одно делится на 3 и по крайней мере два — на 2, причем одно из этих двух последних чисел делится на 4. Следовательно, произведение пяти последовательных целых чисел делится на $5\cdot3\cdot4\cdot2=120$.

4. Чтобы данное число делилось на 6, необходимо и достаточно, чтобы оно делилось на 2 и на 3.

При четном n данное число делится на 2. Если же n нечетно, то n^2+5 делится на 2. В самом деле:

$$n=2m-1, \quad (2m-1)^2+5=4m^2-4m+6.$$

Если n делится на 3, то и данное число делится на 3. Если же n не делится на 3, то в остатке может получиться 1 или 2. Тогда имеем во втором сомножителе:

а) $(3k+1)^2+5=9k^2+6k+6$;
б) $(3k+2)^2+5=9k^2+12k+9$,

т. е. второй сомножитель обязательно будет делиться, если n не кратно трем.

5. Первая цифра частного 5, так как

$$72 \cdot 6 = 432 > 42x.$$

Вторая цифра частного 8 или 9.

$$\begin{array}{r|l} 42x\,4y & 72 \\ \underline{-\,360} & \overline{58} \\ 6x4 & \\ \underline{-\,576} & \\ (x+2)\,8y & \end{array}$$

1) Если вторая цифра частного 8, то полученное в остатке трехзначное число $(x+2)\,8\,y$ должно делиться на 72. Из таких чисел только 288 имеет цифру десятков 8.

$$x+2=2; \quad x=0; \quad y=8.$$

2) Если вторая цифра частного 9, то имеем:

$$\begin{array}{r|l} 42x\,4y & 72 \\ \underline{-\,360} & \overline{59} \\ 6x4 & \\ \underline{-\,648} & \\ (x-5)\,6y & \end{array}$$

$(x-5)\,6y$ кратно 72; по цифре 6 находим, что это число 360.

$$x-5=3; \quad x=8; \quad y=0.$$

6. $жзи \times 8 = уфч$, отсюда $ж = 1$; $стд - уфч = шяэ$, значит, $з = 0$ или 1. Но $жзи \times к = мнпр$, откуда $к = 9$ и аналогично $л = 9$. Тогда $з = 1$, а $и = 2$.

$110768 : 112 = 989$.

7. Для нумерации страниц учебника употребили: 9 однозначных чисел — 9 цифр; все двузначные числа — 90 чисел — 180 цифр. Всеми однозначными и двузначными числами занумеровано 99 страниц, и на это ушло 189 цифр. Осталось $411 - 189 = 222$ цифры, которые ушли на написание $222 : 3 = 74$ трехзначных чисел. В учебнике 173 страницы.

8. Заметим, что $2 \cdot 5 = 10$. Так как четных чисел в этом произведении больше, чем чисел, кратных 5, то надо подсчитывать количество сомножителей, кратных 5. Нетрудно видеть, что их будет 20. Но среди этих множителей есть числа 25, 75, 50 и 100 — кратные 25. Поэтому всего произведений $2 \cdot 5$ будет 24. Следовательно, это произведение оканчивается 24 нулями.

9. Обозначим пять последовательных целых чисел следующим образом: $(n-2)$, $(n-1)$, n, $(n+1)$, $(n+2)$, тогда $(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 5(n^2+2)$. Для того, чтобы $5(n^2+2)$ было квадратом, необходимо, чтобы n^2+2 делилось на 5, т. е. n^2 должно оканчиваться на 3 или 8, что невозможно. Следовательно, n^2+2 не делится на 5.

10. Пусть число B является точным квадратом числа

$$A = a_n 10^n + \ldots + a_1 10 + a_0.$$

Две последние цифры числа B получаются при умножении числа $a_1 10 + a_0$ на себя. Если a_0 — четное число, то утверждение справедливо. Пусть теперь a_0 — нечетно, тогда легко проверить, что у a_0^2 вторая цифра всегда четная. Вторая же цифра числа B получается, если ко второй цифре числа $2a_1a_0 10$ добавить вторую цифру числа a_0^2 и, быть может, полученную сумму уменьшить на число, кратное 10, следовательно, если a_0 — нечетно, то вторая цифра числа B будет четным числом.

11. Вставим между цифрами числа 1331 по n нулей. Получим число $N = 1000\ldots03000\ldots03000\ldots01$. Это число имеет $3n + 4$ цифры и может быть записано так:

$$N = 10^{3n+3} + 10^{2n+2} \cdot 3 + 10^{n+1} \cdot 3 + 1 = (10^{n+1} + 1)^3.$$

12. Пусть $a_1a_2 \ldots a_k$ — данное число, $a_ka_2 \ldots a_{k-1}a_1$ — число, полученное из него перестановкой первой и последней цифры. Для выполнения требований задачи необходимо, чтобы $a_1 = 1$, так как при $a_1 \geqslant 2$, $a_ka_2 \ldots a_{k-1}a_1$ не может быть больше в 5, тем более в 6 или в 8 раз. Таким образом, $a_1 = 1$.

Но никакое целое число при умножении на 5, 6 или 8 не может оканчиваться на 1.

13. Обозначив искомое число через x, составим уравнение:

$$9 + 90 \cdot 2 + (x - 99) \cdot 3 = 2x$$

Ответ: 108.

14. Если число $A = \underbrace{111\ldots1}_{m}$ делится на $\underbrace{33\ldots3}_{100}$, то A делится на 3 и делится на $B = \underbrace{11\ldots1}_{100}$. Но если A делится на B, то $m = l \cdot 100$. С другой стороны, так как A делится на 3, то m должно делиться на 3, т. е. $m = 3n \cdot 100$. Наименьшее число с таким свойством будет при $m = 300$.

Ответ: число состоит из 300 единиц.

15. Пусть дано число A. Обозначив число, выраженное тремя последними цифрами числа A, через N, а число,

выраженное всеми остальными цифрами, через M, будем иметь:

$A = M \cdot 1000 + N$. Число $1000 + 1$ делится и на 7, и на 11, и на 13. Заметив это, преобразуем полученную сумму: $A = M(1000 + 1) - M + N$, которую можно записать:

$$A = M \cdot 1001 - (M - N), \text{ если } M > N \text{ и}$$
$$A = M \cdot 1001 + (N - M), \text{ если } M < N.$$

Так как $M \cdot 1001$ всегда делится и на 7, и на 11, и на 13, то, для того чтобы число A делилось на 7, или на 11, или на 13, необходимо и достаточно, чтобы разности $(M - N)$ или $(N - M)$ делились соответственно на 7, или на 11, или на 13.

16. Пусть $A = a_n 8^{n-1} + a_{n-1} 8^{n-2} + \ldots + a_1$.

8^k при делении на 7 дает в остатке 1, значит A при делении на 7 дает в остатке число

$$r = a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1.$$

Отсюда вытекает такой признак делимости: число A тогда и только тогда делится на 7, если сумма всех его цифр делится на 7.

17. Пусть $A = a_n 8^{n-1} + a_{n-1} 8^{n-2} + \ldots + a_1$.

8^k при делении на 9 дает в остатке либо 1, либо -1 в зависимости от того, четно или нечетно число k. Тогда число A при делении на 9 дает остаток с точностью до знака, равный

$$r = a_n - a_{n-1} + a_{n-2} - \ldots + a_1.$$

Таким образом, число A тогда и только тогда делится на 9, если знакочередующаяся сумма всех его цифр делится на 9.

18. Всякое простое число $p > 3$ имеет один из следующих двух видов:

$$1)\ p = 3k + 1,$$
$$2)\ p = 3k + 2.$$

Пусть $p = 3k + 1$, тогда $(3k + 1)^2 + 8 = 9k^2 + 6k + 9$. Это число делится на 3 и, значит, не является простым. Пусть теперь $p = 3k + 2$, тогда $(3k + 2)^2 + 8 = 9k^2 + 12k + 12$ делится на 3, т. е. опять не простое число.

Наконец рассмотрим два оставшихся простых числа: $p = 2$ и 3. Если $p = 2$, то $p^2 + 8 = 12$ — число не простое. При $p = 3$ имеем $p^2 + 8 = 17$ — число простое.

Ответ: $p = 3$.

19. Пусть p — любое простое число, причем $p > 3$. $p^2 = (p^2 - 1) + 1$. Покажем, что $p^2 - 1$ делится на 24, откуда и будет следовать утверждение задачи. $p^2 - 1 = (p - 1)(p + 1)$. Так как p — простое число и $p > 3$, то p — нечетное число, заведомо не делящееся на 3. Тогда одно из чисел $p - 1$ или $p + 1$ обязательно делится на 3. Каждое из них делится на два, а так как среди двух последовательных четных чисел одно всегда делится на 4, значит, $p^2 - 1$ делится на 8.

20. Пусть $p = 30n + m$, где p — простое число, а m — остаток, $m < 30$ и m — нечетное число. Тогда m может делиться лишь на числа, отличные от 3 и 5. Если же $m = m_1 \cdot m_2$, где $m \geqslant 7$, то $m_2 = 1$ или $m_2 \geqslant 7$. Второй случай, очевидно, отпадает, значит, m — простое число.

21. Пусть p и q имеют общий делитель d, тогда $p = p_1 d$, $q = q_1 d$.

$$2^p - 1 = (2^d)^{p_1} - 1 = (2^d - 1)(2^{d(p_1-1)} + 2^{d(p_1-2)} + \ldots + 1);$$

$$2^q - 1 = (2^d)^{q_1} - 1 = (2^d - 1)(2^{d(q_1-1)} + 2^{d(q_1-2)} + \ldots + 1).$$

Следовательно, если $2^p - 1$ и $2^q - 1$ взаимно просты, то p и q также взаимно просты, т. е. $d = 1$.

Пусть теперь p и q взаимно просты и $p > q$. Если d — общий делитель чисел $2^p - 1$ и $2^q - 1$, то d — делитель также числа $2^p - 2^q = 2^q(2^{p-q} - 1)$. Так как $2^k - 1$ на 2 не делится ($k > 0$), то $2^{p-q} - 1$ делится на d. Если еще $p - q > q$, то, рассуждая аналогично, получим, что $2^{p-lq} - 1$ делится на d, где $p - lq < q$. Обозначим $p - lq = q_1$ и, повторяя рассуждения, найдем l_1 такое, что $2^{q-l_1q_1} - 1$ делится на d, где $q - l_1q_1 < q_1$. Таким образом дойдем до $q_i = 1$, т. е. $2 - 1 = 1$ делится на d, откуда $d = 1$.

22. Наряду с заданным произведением, которое обозначим через a, рассмотрим произведение $b = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \ldots \frac{98}{99}$.

Легко видеть, что $a \cdot b = \frac{1}{100}$.

Так как $a < b$, то $a < \frac{1}{10}$.

23. Обозначим эту дробь $\frac{m}{n}$, тогда $\frac{m+21}{n+28} = \frac{m}{n}$; $mn + 21n = mn + 28m$; $21n = 28m$; $\frac{m}{n} = \frac{3}{4}$.

24. Пусть x *км/час* — собственная скорость катера, y *км/час* и z *км/час* — скорости течений рек, $y > z$; расстояние, пройденное каждым катером в одном направлении, s *км*; время движения, затраченное на весь путь, в реке с быстрым течением t_1 часов, с медленным течением t_2 часов.

$$t_1 = \frac{s}{x+y} + \frac{s}{x-y} = \frac{2sx}{x^2-y^2};$$

$$t_2 = \frac{s}{x+z} + \frac{s}{x-z} = \frac{2sx}{x^2-z^2}.$$

Из сравнения полученных дробей приходим к выводу:

$$t_1 > t_2.$$

25. Так как правая часть первого уравнения такая же, как и левая часть второго, а правая часть второго такая же, как и левая часть третьего уравнения, то:

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \frac{x_3}{a_3} = \ldots = \frac{x_{n-1}}{a_{n-1}} = \frac{x_n}{a_n};$$

на основании свойства равных отношений имеем:

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{x_2}{a_2} = \ldots = \frac{x_{n-1}}{a_{n-1}} = \frac{x_n}{a_n} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n},$$

откуда:

$$\frac{x_1}{a_1} = \frac{A}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}, \; x_1 = \frac{a_1 A}{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}.$$

Аналогично получаем значения других неизвестных.

26. Минутной стрелке, чтобы догнать часовую, надо пройти на 45 минутных делений больше часовой стрелки. Так как часовая стрелка проходит одно деление за 12 минут, то она за каждую минуту проходит $\frac{1}{12}$ деления и, следовательно, минутная стрелка нагоняет ее за каждую минуту на $\frac{11}{12}$ делений. На 45 делений потребуется

$$45 : \frac{11}{12} = \frac{45 \cdot 12}{11} = \frac{540}{11} = 49\frac{1}{11} \text{ минут.}$$

27. Выразив цифры года рождения этих людей буквами a, b, c и d, будем иметь $abcd = 1000\,a + 100\,b + 10\,c + d$; $1958 - (1000\,a + 100\,b + 10\,c + d) = a + b + c + d$; $a = 1$; $b = 9$ ($b = 8$ быть не может, так как это не удовлетворит смыслу задачи).

Следовательно, $1958 - (1000 + 900 + 10\,c + d) = 1 + 9 + c + d$, откуда $d = \frac{48 - 11\,c}{2}$. Так как d — число целое, то $11\,c$ есть число четное, тогда $c = 2, 4, 6, 8$. Делаем испытание:

1) если $c = 2$, то $d = 13$ — не удовлетворяет;

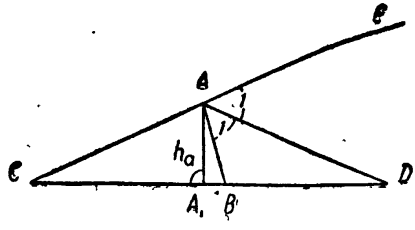
2) если $c = 4$, то $d = 2$;

3) если $c = 6$, то $d = -2$ — не удовлетворяет;

Итак, $d = 2$; $c = 4$.

Люди родились в 1942 году, что соответствует требованию задачи: $1 + 9 + 4 + 2 = 16$; $1958 - 1942 = 16$.

28. Обозначим высоту $h_a = AA_1$, данную биссектрису — AD. Имеем $\angle A_1AD = 60°$, $\angle BAD = \angle DAE = \angle 1$, $\angle BAE = 180° - A$.



$\angle 1 = 90° - \frac{A}{2}$, $\angle ABD + \angle 1 + 30° = 180°$,

$\angle ABD = 60° + \frac{A}{2} = 180° - B$, $A + 2B = 240°$,

$B - C = (A + 2B) - (A + B + C) = 60°$.

29. Подсчитаем сумму углов всех полученных треугольников. Легко видеть, что она равна сумме всех внутренних углов тысячеугольника и $4d \cdot 500$, т. е. равна $2d \cdot 998 + 2d \cdot 1000 = 1998 \cdot 2d$.

Отсюда число полученных треугольников равно:

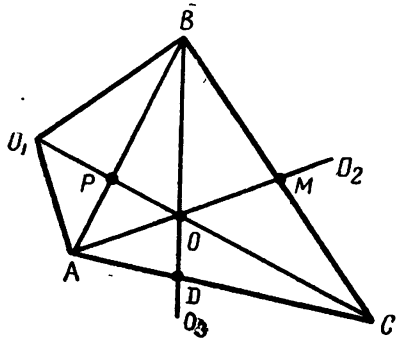
$$\frac{1998 \cdot 2d}{2d} = 1998.$$

30. Точки A, B и C лежат на окружности, описанной около треугольника ABC. Докажем, что точки O_1, O_2, O_3 (симметричные с точкой O пересечения высот $\triangle ABC$

относительно всех его сторон) лежат на той же окружности.

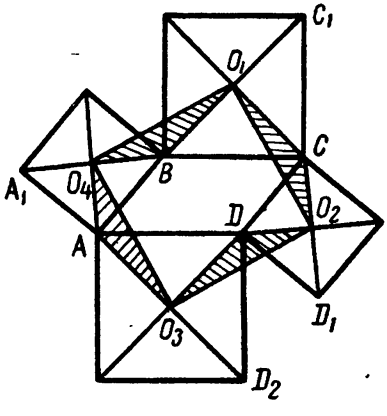
Рассмотрим четырехугольник AO_1BC и установим, что он вписан в окружность, проходящую через точки A, B, C. Имеем:

$$\angle O_1BA = \angle ABD = 90° - \angle BAD;$$
$$\angle O_1AB = \angle BAM = 90° - \angle ABM;$$
$$\angle O_1BC + \angle O_1AC = \angle O_1BA + \angle ABC + \angle O_1AB + \angle BAC = 90° - \angle BAD + \angle ABM + 90° - \angle ABM + \angle BAD = 180°.$$



Отсюда следует, что четырехугольник AO_1BC вписан в окружность, проходящую через точки A, B, C. Следовательно, точка O_1 лежит на рассмотренной окружности. Аналогично устанавливается, что точки O_2 и O_3 лежат на той же окружности.

31. Проведем две взаимно перпендикулярные прямые, параллельные соответственно звеньям ломаной линии. Очевидно, что звеньев ломаной линии, параллельных первой прямой, будет столько же, сколько звеньев, параллельных второй прямой. В то же время число звеньев, параллельных каждой из прямых, будет четным. Следовательно, число всех звеньев будет равно сумме равных четных чисел, т. е. будет делиться на 4.

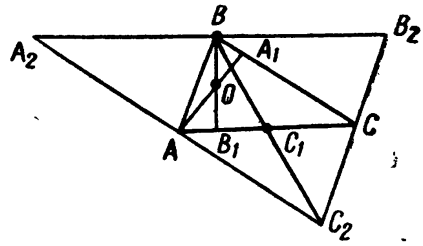


32. Достаточно доказать, что все заштрихованные треугольники равны. Покажем, например, что $\triangle O_1CO_2 = \triangle O_2DO_3$. В остальных случаях рассуждения совершенно аналогичны. Действительно, $O_1C = O_3D$, $O_2C = O_2D$ как половины диагоналей равных квадратов.

$$\angle O_1CO_2 = 90° + \angle BCD = 90° + \angle D_1DD_2 = \angle O_2DO_3.$$

Следовательно, указанные треугольники равны, ибо у них равны две стороны и угол между ними.

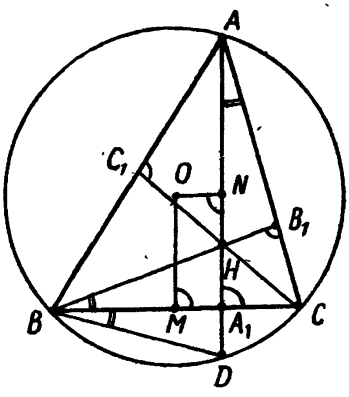
33. Пусть ABC — искомый треугольник. Точки B, O, и C_1 — его вершина, точка пересечения высот и середина стороны AC. Через точки A, B и C проведем прямые, параллельные противоположным сторонам треугольника и продолжим их до пересечения. Получим треугольник $A_2B_2C_2$. Точка O является центром окружности, описанной около $\triangle A_2B_2C_2$, радиус которой равен OC_2. Так как $ABCC_2$ — параллелограмм, то $BC_2 = 2BC_1$, т. е. точку C_2 можно найти, а точки A, B, C — середины сторон треугольника $A_2B_2C_2$.



Построение: строим BB_1C_1, затем, продолжив отрезок BC_1 на $C_1C_2 = BC_1$, найдем точку C_2 и радиус OC_2. Из точки O радиусом OC_2 описываем окружность и находим точки A_2 и B_2 пересечения окружности и прямой, проведенной через точку B параллельно B_1C_1. Середины сторон A_2C_2 и B_2C_2 дадут вершины A и C искомого треугольника.

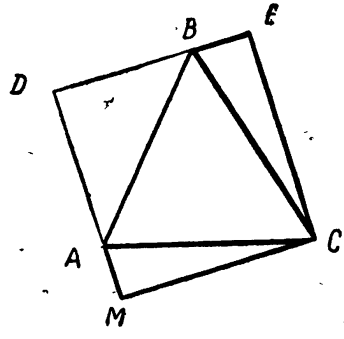
Второе решение

Пусть ABC — искомый треугольник, точка A — данная вершина, M — середина стороны BC, H — точка пересечения высот AA_1, BB_1, CC_1; O — центр окружности, описанной около треугольника ABC. Высота AA_1 принадлежит известной прямой AH, сторона BC — известной прямой $MA_1 \perp AH$; $\angle CAD = \angle CBD$ (D — точка пересечения прямой AH с описанной окружностью), $\angle CBB_1 = \angle CAH$, $HA_1 = A_1D$. Следовательно, известны: точка D, середина N отрезка AD, вершина O прямоугольника MA_1NO — центр описанной окружности, B и C — точки пересечения описанной окружности с прямой MA_1.



34. Имеем $\triangle BEC = \triangle AMC$, значит, $\angle ACM = \angle BCE = \frac{90° - 60°}{2} = 15°$. Построение описанного квад-

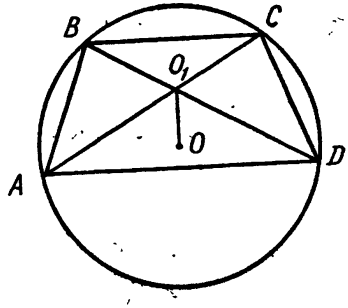
рата, вершина которого совпадает с вершиной C, проводится следующим образом. Строим углы BCE и ACM, из точек A и B опускаем перпендикуляры на соответствующие стороны углов и продолжаем их до пересечения в точке D.



Квадрат $EDMC$ — искомый.

35. Пусть $ABCD$ — искомая трапеция. CD — ее боковая сторона, OO_1 — расстояние от центра окружности до точки пересечения диагоналей трапеции. Очевидно, что $\cup AB = \cup CД$, следовательно, $\angle CBD = \angle BCA$. Тогда $\angle CO_1D = 2 \cdot \angle CBD$. Так как отрезок CD известен, то угол CBD, а значит, и угол CO_1D можно найти.

Таким образом, точка O_1 является пересечением двух геометрических мест: с одной стороны O_1 лежит на окружности радиуса OO_1 с центром в точке O, а с другой — на дуге окружности, из точек которой отрезок CD виден под данным углом CO_1D. Отсюда вытекает построение. Находим угол CO_1D, строим точку O_1 (их может быть, очевидно, две) и находим точки A и B.



36. Высота, указанная в условии, разделяет искомый треугольник на два так, что катеты искомого треугольника служат гипотенузами полученных двух. Пользуясь условиями задачи, можно построить один из этих треугольников с меньшей гипотенузой и потом — искомый треугольник.

VIII КЛАСС

1. Известно, что $\frac{m}{n} + \frac{n}{m} \geqslant 2$. Применим это соотношение для решения задачи. Имеем:

$$ab(a+b-2c) + bc(b+c-2a) + ac(a+c-2b) =$$
$$= abc\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{c} - 2 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} - 2 + \frac{a}{b} + \frac{c}{b} - 2\right) =$$

$$= abc\left[\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}-2\right)+\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}-2\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{b}-2\right)\right] \geqslant 0,$$

так как $a>0$, $b>0$, $c>0$ и каждое из чисел, стоящих в круглых скобках, не меньше нуля.

2. Преобразуем данное равенство:

$(ab+ac+bc)(a+b+c)=abc;$
$(a+b)bc+(a+b)ac+(a+b)ab+(a+b)c^2=0;$
$(a+b)(a+c)(b+c)=0.$

Отсюда следует, что имеет место по крайней мере один из трех возможных случаев:

1) $a+b=0$ и $a=-b$;
2) $a+c=0$ и $a=-c$;
3) $b+c=0$ и $b=-c$.

Значит, данное неравенство верно, если хотя бы два из трех чисел a, b и c равны по абсолютной величине и противоположны по знаку. Но в этом случае то же будет иметь место и для чисел a^n, b^n и c^n, где n — нечетное число, поэтому замена a, b и c соответственно a^n, b^n и c^n не нарушит данного равенства. Полученное при этой замене равенство и есть то, которое требовалось доказать.

3. $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n-1}\right)(n-1)! = \left[\left(1+\right.\right.$

$\left.\left.+\frac{1}{n-1}\right)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n-2}\right)+\ldots\right](n-1)! = \left[\frac{n}{1\,(n-1)}+\right.$

$\left.+\frac{n}{2\,(n-2)}+\frac{n}{3\,(n-3)}+\ldots\right](n-1)! = n\,[1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\ldots$

$\ldots(n-2)+1\cdot3\cdot4\cdot5\ldots(n-3)(n-1)+1\cdot2\cdot4\cdot5\ldots(n-4)$
$(n-2)(n-1)+\ldots];$

отсюда видно, что данное выражение делится на n.

Замечание: следует отметить, что $n \geqslant 3$, так как при $n=2$ предложение неверно.

4. Достаточно доказать, что не существует числа d, большего 2, на которое делились бы числа $a+b$ и a^2+b^2 (при условии, что a и b взаимно просты).

Если a^2+b^2 и $a+b$ делятся на d, то и числа $2a^2=(a^2+b^2)+(a-b)(a+b)$ и $2b^2=(a^2+b^2)+(b-a)(a+b)$ делятся на d. Но поскольку числа a и b взаимно просты, то числа a^2 и b^2 также взаимно просты; следовательно, $2a^2$ и $2b^2$ не могут делиться на число d, большее 2,

поэтому и числа $a+b$ и a^2+b^2 не могут делиться на число d. Но на 2 они делятся, так как на 2 делятся $2a^2$ и $2b^2$.

5. $a^5+4a^3+3a=a(a^2+1)(a^2+3)$ и $a^4+3a^2+1=a^2(a^2+3)+1$. Пусть a_0 — некоторое целое число. Тогда делители числа $a_0^5+4a_0^3+3a_0$ являются делителями по крайней мере одного из чисел a_0, a_0^2+1 и a_0^2+3. Пусть число d — делитель числа a_0 или числа a_0^2+3. Очевидно, что это число не может быть делителем числа $a_0^4+3a_0^2+1$. Пусть d — делитель числа a^2+1. Так как $a_0^4+3a_0^2+1=a_0^4+3a_0^2+2-1=(a_0^2+1)(a_0^2+2)-1$, то очевидно, что d не может быть делителем числа $a_0^4+3a_0^2+1$.

6. Из уравнения видно, что y должен быть нечетным числом. Положив $y=2z+1$, получим

$$2x^2-20z^2-20z-5=7$$

или

$$x^2-10z^2-10z=6,$$

откуда следует, что x есть четное число. Положим $x=2u$. Тогда $2u^2-5z(z+1)=3$, что невозможно, так как $z(z+1)$ есть четное число.

7. При $\sqrt{3}=a$ данное уравнение принимает вид:

$$x^3+2ax^2+a^2x+a-1=0$$

или

$$xa^2+(2x^2+1)a+(x^3-1)=0.$$

Решая это уравнение относительно a (здесь $x\neq 0$), имеем:

$$a=\frac{-(2x^2+1)\pm(2x+1)}{2x}.$$

Итак, получаем:

1) $a=1-x$, т. е. $x=1-a$ или $x_1=1-\sqrt{3}$;

2) $a=-\frac{x^2+x+1}{x}$ или $x^2+(a+1)x+1=0$, откуда находим, что $x_{2,3}=\frac{-(\sqrt{3}+1)\mp\sqrt[4]{12}}{2}$.

8. $x_1^2+x_2^2=(x_1+x_2)^2-2x_1x_2=(a-2)^2+2(a+3)=a^2-2a+10$. Исследуем трехчлен $a^2-2a+10$.

$$D=-36<0.$$

$$a^2-2a+10=(a-1)^2+9.$$

Наименьшее значение этого трехчлена 9 при $a = 1$.

9. $x^4 + y^4 = (x^2 + y^2)^2 - 2x^2y^2 = [(x + y)^2 - 2xy]^2 - 2x^2y^2 = (9 - 2xy)^2 - 2x^2y^2$; $x^2y^2 - 18xy + 32 = 0$.

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x + y = 3 \\ xy = 16 \end{cases} \quad xy = 2; \; xy = 16.$$

$$(1; 2); \; (2; 1).$$

10. Прибавим и вычтем из левой части сумму

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} \cdots + \frac{1}{2k}.$$

Сделав группировку, получим:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k} -$$

$$- \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \cdots + \frac{1}{2k} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2k}\right) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{2k-1} + \frac{1}{2k} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{k}\right).$$

11. При делении любого целого числа на n остаток либо равен нулю, либо меньше n.

Если среди n различных чисел, написанных только двойками: 2, 22, 222, ..., $\underbrace{222 \ldots 2}_{n}$, найдется число, кратное n, тогда остается приписать справа один или несколько нулей и положение доказано. Если же среди этих чисел не будет числа, кратного n, то по крайней мере два числа при делении на n дадут одинаковые остатки, ибо остатки будут 1, 2, ..., $n - 1$, а чисел n. Разность этих двух чисел кратно n и состоит из двоек и нулей.

12. При вычеркивании цифр надо учитывать, что цифры нельзя переставлять и что наибольшее число будет получаться, если в старшем разряде будет 9 единиц.

Вычеркиваем первые 8 цифр, затем от 10 до 18 и единицу у числа 19, т. е. еще 19 цифр и т. д. до 4 у числа 49. Итого вычеркнуто цифр: $8 + 19 + 19 + 19 + 19 = 84$. Вычеркиваем далее 50, 51, 52, 53, 54, 55, 56, и цифры 5 у 57 и 58.

Остается число: 9999978596061 .... 9899100.

13. $|x+1|-|x|+3|x-1|-2|x-2|=|x+2|$. Для решения уравнения надо абсолютные значения заменить выражениями, заведомо не отрицательными. Рассмотрим это уравнение на следующих промежутках:

$$x<-2;\ -2\leqslant x<-1;\ -1\leqslant x<0;\ 0\leqslant x<1;$$
$$1\leqslant x<2;\ x\geqslant 2;$$

надо решить шесть уравнений.

1) При $x<-2$

$$-(x+1)-(-x)+3(1-x)-2(2-x)=-x-2;$$
$$0\cdot x=0;\ x<-2.$$

2) При $-2\leqslant x<-1$

$$-(x+1)+x+3(1-x)-2(2-x)=x+2.$$
$$x=-2.$$

3) При $-1\leqslant x<0$

$$x+1+x+3(1-x)-2(2-x)=x+2.$$
$$0\cdot x=-2.\ \text{Решения нет.}$$

4) $0\leqslant x<1$;

$$x+1-x+3(1-x)-2(2-x)=x+2;$$
$$-2x=2;\ x=-1.\ \text{Решения нет.}$$

5) $1\leqslant x<2$;

$$x+1-x+3(x-1)-2(2-x)=x+2;$$
$$4x=8;\ x=2.\ \text{Решения нет.}$$

6) $x\geqslant 2$;

$$x+1-x+3x-3-2x+4=x+2;$$
$$0\cdot x=0;\ x\geqslant 2.$$

Ответ: $x\leqslant -2;\ x\geqslant 2$.

14. Рассмотрим два целых числа p и q. Покажем, что p не может быть корнем этой функции. Заметим, что корнем функций называется такое значение аргумента, при котором функция равна нулю.

Если $(p-q)$ — четное число, тогда

$f(p)-f(q)=a_0(p^3-q^3)+a_1(p^2-q^2)+a_2(p-q)$ — четное число.

Если $q=1$, тогда p — нечетное число. $f(p)$ равно сумме четного и нечетного чисел, есть число нечетное и, следовательно, не равно нулю.

Пусть $q = 0$, тогда p — четное число. $f(p)$ аналогично предыдущему не равно нулю.

15. Из условия, что $x = y^2 + y^3$ и x является четырехзначным числом, следует, что

$$1000 \leqslant y^2 + y^3 \leqslant 10000,$$
$$1000 \leqslant y^2(1 + y) \leqslant 10000.$$

При $y = 9$ $x = 810$.
$y = 10$ $x = 1100$.

С увеличением y в 2 раза x увеличивается примерно в 8 раз. Рассмотрим:

$$y = 20; \quad x = 8400;$$
$$y = 21; \quad x = 9702;$$
$$y = 22; \quad x = 11132.$$

Поэтому $9 < y < 22$.

Так как $x = y^2(y + 1)$ и это число должно быть кратно 7, то хоть один из двух множителей y^2 и $(y + 1)$ должен быть кратен 7.

Из значений y, удовлетворяющих этому условию, остаются 13, 14, 20 и 21.

Ответ: $13^2(13 + 1) = 2366$.
$14^2(14 + 1) = 2940$.
$20^2 \cdot 21 = 8400$.
$21^2 \cdot 22 = 9702$.

16. Рассмотрим выражение: $\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} - 1\right) +$

$$+\left(\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} + 1\right) + \left(\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} - 1\right) =$$

$$= \frac{(a - b + c)\,(a - c + b)\,(b + c - a)}{2abc};$$

$$\frac{(a - b + c)\,(a - c + b)\,(b + c - a)}{2abc} = 0,$$

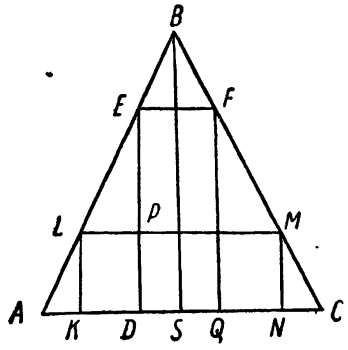
так как мы к левой части данного выражения прибавим $-1 - 1 + 1 = -1$; эта дробь равна нулю в том случае, если либо: $a - b + c = 0$; $a - c + b = 0$; $b + c - a = 0$. Отсюда имеем $a - b = -c$; $a - c = -b$; $b + c = a$. Если

$$b + c = a, \text{ то } \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{(b + c)^2 - 2bc - a^2}{2bc} =$$

$$= \frac{a^2 - a^2 - 2bc}{2bc} = -1;$$

аналогично: $\frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = 1$ при $a - c = -b$;

$$\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} = 1 \quad \text{при } a - b = -c.$$



17. Пусть в прямоугольнике $KLMN$ сторона $KL = MN = x_1$, $KN = LM = y_1$ и в прямоугольнике $DEFQ$ сторона $DE = QF = x_2$, $DQ = EF = y_2$. По условию задачи должно быть: $x_1 + y_1 = x_2 + y_2$, или $x_2 - x_1 = y_1 - y_2$. Из подобия треугольников LPE и ASB находим:

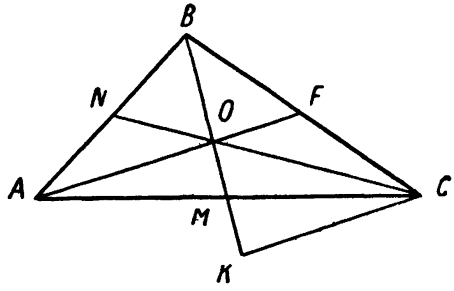
$$\frac{BS}{AS} = \frac{EP}{LP}; \quad \frac{BS}{AS} = \frac{x_2 - x_1}{\frac{y_1}{2} - \frac{y_2}{2}} = \frac{2(x_2 - x_1)}{y_1 - y_2}.$$

Так как $x_2 - x_1 = y_1 - y_2$,

$$\frac{BS}{AS} = 2; \; BS = 2AS; \; BS = AC, \text{ т. е.}$$

в треугольнике высота равна основанию.

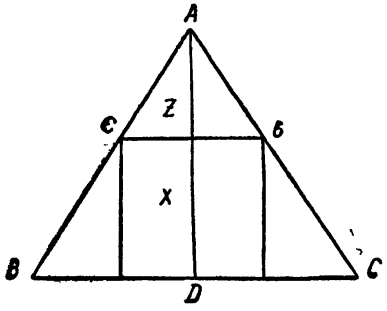
Следовательно, решение задачи сводится к построению равнобедренного треугольника, у которого высота равна основанию.

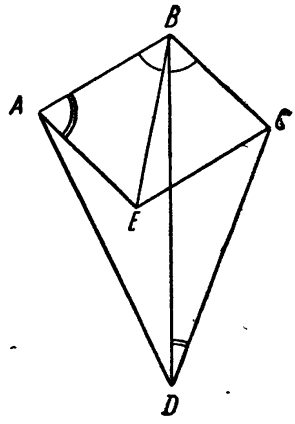


18. Пусть O — точка пересечения медиан треугольника ABC; AF, BM и CN — его медианы. Продолжим BM на расстояние $MK = OM$ и соединим K и C. Тогда $S_{OCK} = \frac{1}{3} S_{ABC}$. Но стороны $\triangle OCK$ составляют $\frac{2}{3}$ соответствующих медиан $\triangle ABC$. Поэтому искомое отношение равно $\frac{1}{3} : \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{3}{4}$.

19. Обозначив сторону квадрата через x, получим (см. чертеж): $\frac{a}{x} = \frac{h_a}{h_a - x}$, откуда $x = \frac{ah_a}{a + h_a} = \frac{2S}{a + \frac{2S}{a}}$.

Если $ab = 2S$, то $\angle C = 90°$, и из $b + \frac{2S}{b} = c + \frac{2S}{c}$ найдем: либо $\angle A = 90°$, либо $b = c$, что невозможно. Поэтому $a = b = c$, т. е. $\angle A = \angle B = \angle C = 60°$.





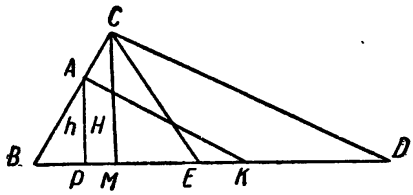
20. Пусть в четырехугольнике $ABCD$ $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$, где AC и BD диагонали четырехугольника. Дополнительно построим $\angle BAE = \angle BDC$ и $\angle ABE = \angle DBC$. $\triangle ABE \sim \triangle BCD$; $\frac{AB}{BD} = \frac{AE}{CD} = \frac{BE}{BC}$ (1), откуда $AB \cdot CD = AE \cdot BD$ (2). В треугольниках ABD и BEC $\angle ABD = \angle CBE$, так как $\angle ABD = \angle ABE + \angle EBD$ и $\angle CBE = \angle CBD + \angle EBD$.

Кроме того, из (1) $\frac{AB}{BD} = \frac{BE}{BC}$, поэтому $\frac{AB}{BE} = \frac{BD}{BC} = \frac{AD}{CE}$ (3), откуда $BC \cdot AD = BD \cdot CE$ (4). Складывая равенства (2) и (4) получим: $AB \cdot CD + BC \cdot AD = BD(AE + EC)$ (5). Сравнив равенство (5) с данным, придем к выводу: $AE + EC = AC$, т. е. в данном четырехугольнике точка E должна лежать на AC, но в этом случае окружность, проведенная через вершины A, B и C пройдет также через вершину D (так как $\angle BDC = \angle BAE$).

Утверждение доказано. Около четырехугольника $ABCD$ можно описать окружность.

21. Допустим, что требуемая прямая есть AK. Надо найти положение точки K.

Проводим медиану треугольника CE и высоту треугольника $CM = H$. Перпендикуляр из точки A на основание $AP = h$. Известно, что медиана треугольника делит его на равновеликие части, т. е. $S_{BCE} = S_{CED}$. Тогда $S_{BAK} = S_{BCE}$, но $S_{BAK} = \frac{BK \cdot h}{2}$ и $S_{BCE} = \frac{BE \cdot H}{2}$. Следовательно,



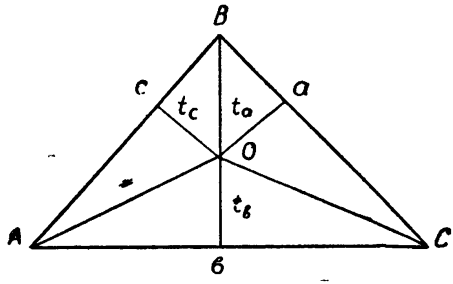
$BK \cdot h = BE \cdot H$, т. е. $\frac{BE}{BK} = \frac{h}{H}$. Остается построить отрезок BK, как четвертый пропорциональный.

22. Обозначим площади треугольников ABC, AOB, BOC и AOC соответственно через S, S_1, S_2, S_3.

$$S = S_1 + S_2 + S_3 = \frac{at_a}{2} + \frac{bt_b}{2} + \frac{ct_c}{2}.$$

Разделив левую и правую части этого равенства на S, получим:

$$\frac{at_a}{2S} + \frac{bt_b}{2S} + \frac{ct_c}{2S} = 1. \quad (1)$$



Но

$$S = \frac{ah_a}{2} = \frac{bh_b}{2} = \frac{ch_c}{2};$$

$$\frac{a}{2S} = \frac{1}{h_a}; \quad \frac{b}{2S} = \frac{1}{h_b}; \quad \frac{c}{2S} = \frac{1}{h_c}. \quad (2)$$

Заменив в (1) выражение $\frac{a}{2S}$ из (2), получим:

$$\frac{t_a}{h_a} + \frac{t_b}{h_b} + \frac{t_c}{h_c} = 1.$$

23. Пусть a — основание треугольника, $b = c$ — боковые стороны.

$$r = \frac{S}{P}; \quad R = \frac{abc}{4S}.$$

Перемножив их левые и правые части, будем иметь $rR = \frac{abc}{4P}$ или

$$rR = \frac{ab^2}{2(a+2b)}. \quad (1)$$

Вычислим высоту H треугольника двумя способами:

$$H = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}. \quad (2)$$

$$R = \frac{abc}{4S} = \frac{ab^2}{4S};\ 4SR = ab^2;\ 2aHR = ab^2;\ H = \frac{ab^2}{2R}. \quad (3)$$

Из (2) и (3) имеем: $b^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{b^4}{4R^2}$; отсюда

$$a = \frac{b}{R}\sqrt{4R^2 - b^2}. \quad (4)$$

Подставив это значение a в (1), получим уравнение относительно b

$$2Rr\left(\frac{b}{R}\sqrt{4R^2 - b^2} + 2b\right) = \frac{b^3\sqrt{4R^2 - b^2}}{R};$$

откуда, сделав соответствующие преобразования, получим:

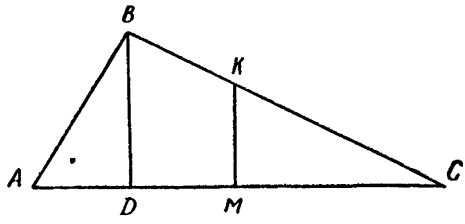
$$(2Rr - b^2)\sqrt{4R^2 - b^2} = -4Rr.$$

Возведя обе части в квадрат и преобразовав, получим:

$$b^4 - 4R(R + r)b^2 + 4R^2r(4R + r) = 0.$$

Из этого находим b, а из (4) находим a.

24. K — искомая точка. Пусть в треугольнике ABC $BD \perp AC$; $KM \perp AC$ и делит площадь треугольника ABC пополам; имеем:



$$2KM \cdot MC = AC \cdot BD, \quad (1)$$

из подобия $\triangle BDC$ и $\triangle KMC$:

$$\frac{BD}{KM} = \frac{DC}{MC};\ KM \cdot DC = BD \cdot MC. \quad (2)$$

Разделив (1) на (2) получим:

$$\frac{2MC}{DC} = \frac{AC}{MC};\ MC = \sqrt{\frac{1}{2}AC \cdot DC},$$

т. е. MC — средняя пропорциональная между $\frac{1}{2}$ AC и DC.

Построив MC и восстановив из точки M перпендикуляр до пересечения с BC, получим точку K.

25. По условию имеем: $\frac{m_a}{c} = \frac{m_b}{b} = \frac{m_c}{a} = x$ (так как против большей стороны лежит меньшая медиана). Отсюда:

$$m_a = cx;\ m_b = bx;\ m_c = ax. \qquad (1)$$

По известной формуле:

$$4m_a^2 = 2b^2 + 2c^2 - a^2;$$
$$4m_b^2 = 2a^2 + 2c^2 - b^2;$$
$$4m_c^2 = 2a^2 + 2b^2 - c^2.$$

После сложения получим:

$$4(m_a^2 + m_b^2 + m_c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2).$$

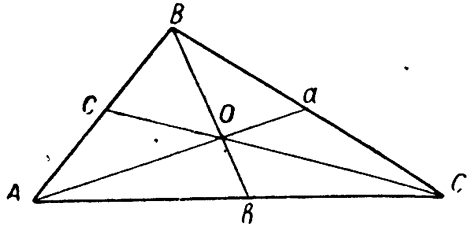
Заменив m_a, m_b и m_c из (1), найдем:

$$4x^2(a^2 + b^2 + c^2) = 3(a^2 + b^2 + c^2);$$

$$x^2 = \frac{3}{4};\ x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

26. Центр тяжести O треугольника находится в точке пересечения медиан, поэтому площадь каждого из треугольников AOB, BOC и AOC равна $\frac{1}{3}$ площади S данного $\triangle ABC$, т. е. имеем

$$\frac{al}{2} = \frac{bm}{2} = \frac{cn}{2} = \frac{S}{3} \text{ или } al = bm = cn = \frac{2S}{3}.$$



Делим все члены этого равенства на abc:

$$\frac{l}{bc} = \frac{m}{ca} = \frac{n}{ab} = \frac{2S}{3abc}.$$

По свойству равных отношений:

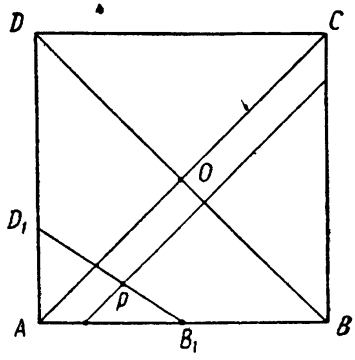
$$\frac{l + m + n}{ab + bc + ac} = \frac{2S}{3abc}.$$

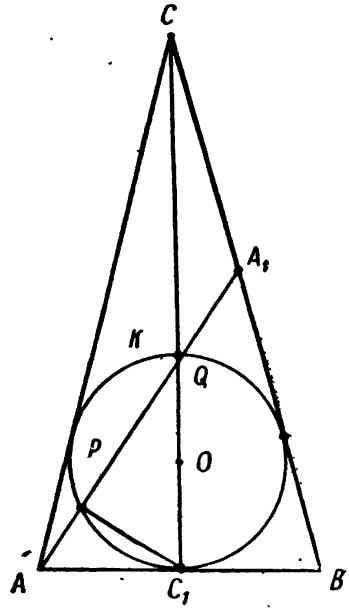
Но $R = \frac{abc}{4S}$, следовательно, $\frac{S}{abc} = \frac{1}{4R}$; $\frac{2S}{3abc} = \frac{1}{6R}$. Сделав

подстановку, получим: $\frac{l+m+n}{ab+bc+ac}=\frac{1}{6R}$ и отсюда

$$R=\frac{ab+bc+ac}{6(l+m+n)}.$$

27. Если данная точка совпадает с центром квадрата, то любая прямая, проходящая через эту точку, делит квадрат на две равновеликие части. Если точка P расположена внутри квадрата $ABCD$, притом ближе к диагонали AC, чем к диагонали BD и внутри треугольника AOB (O — точка пересечения диагоналей), то искомой фигурой будет треугольник B_1AD_1 с точкой D_1 на стороне AD, точкой B_1 на стороне AB и с точкой P — в середине гипотенузы B_1D_1.





28. Пусть в равнобедренном треугольнике ABC с основанием AB и медианами AA_1, CC_1 вписанная окружность K пересекает медиану AA_1 в точках P и Q так, что $AP=PQ=QA_1$. Тогда $\triangle AA_1B$ должен быть равнобедренным с основанием AA_1 и точка Q — принадлежать медиане CC_1. Окружность K должна содержать C_1, P, Q, и $\angle C_1PQ=90°$; отрезок PC_1 служит высотой и медианой $\triangle AQC_1$ с прямым углом при вершине C_1. Поэтому $\angle C_1AA_1=\angle AA_1B=45°$, $\angle ABA_1=\angle BAC=90°$, что невозможно.

29. Если x и y — длины диагоналей искомой трапеции, то, в соответствии с условием задачи,

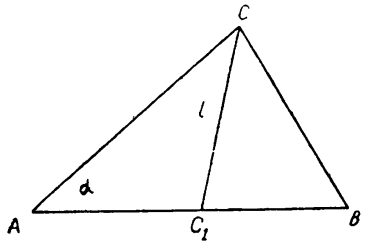
$$x^2+x^2=a^2+y^2.$$

Этому соотношению удовлетворяют стороны четырехугольника $ABCD$, вписанного в окружность с произвольным диаметром $AC > a$: $AB = a$, $BC = y$, $CD = x$, $DA = x$.

Если через концы произвольного отрезка $LM < y$ провести параллельные одинаково направленные лучи LL' и MM', на луче LL' построить точку P при условии $MP = y$, а на луче MM' — точку N при условии $LN = x$, то трапеция $LMNP$ будет одной из искомых.

Задача имеет бесконечное множество решений.

30. Имеем: $c = \frac{a+b}{2}$, $CC_1 = l$, $\angle BAC = \alpha$;



$$AC_1 : C_1B = b : a, \quad AC_1 + C_1B = c;$$

$$AC_1 = \lambda b,$$

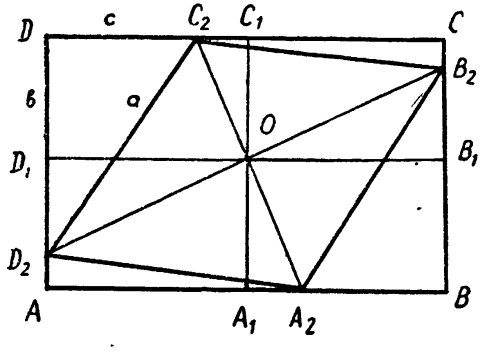
$$C_1B = \lambda a, \quad \lambda(b + a) = c, \lambda 2c = c,$$

$$\lambda = \frac{1}{2}; \quad AC_1 = \frac{b}{2};$$

$$C_1B = \frac{a}{2}.$$

Пользуясь этими условиями, можно построить треугольник, подобный $\triangle ABC$, а потом — и сам $\triangle ABC$.

31. Пусть в прямоугольник $ABCD$ вписан ромб $A_2B_2C_2D_2$; их общий центр O; A_1, B_1, C_1, D_1 — середины сторон AB, BC, CD, DA; $AB = 2c$, $AD = 2b$.



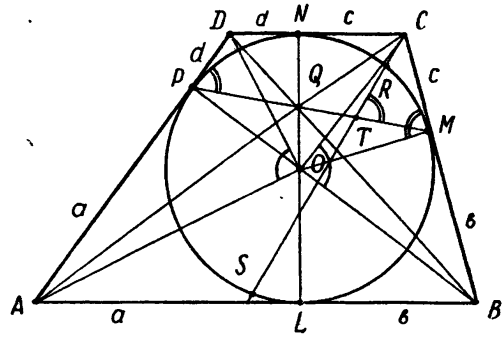
Имеем: $\triangle OC_1C_2 \sim \triangle OD_1D_2$, $OD_2 = kOC_2$, $c = kb$, $D_1D_2 = kC_1C_2$;

$$OC_2^2 + OD_2^2 = a^2;$$

$$OC_2^2 = \frac{a^2b^2}{b^2 + c^2}.$$

32. Обозначим через k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 данные окружности. На окружности k_1, произвольно взятой из данных окружностей, в соответствии с условием задачи, должны быть точки ее пересечения с тройками окружностей; (k_2, k_3, k_4), (k_3, k_4, k_5), (k_2, k_4, k_5). Если эти точки разные, то окружности k_1 и k_4 должны совпадать между собой, что противоречит условию задачи. Следовательно, две из этих точек должны совпадать одна с другой. Но через такую точку будут проходить все данные окружности.

33. Пусть $ABCD$ — данная трапеция, O — центр вписанной окружности, L, M, N, P — точки прикосновения окружности соответственно к сторонам AB, BC, CD, DA и $AB \| DC$. Треугольники AOD и BOC — прямоугольные с гипотенузами AD и BC, так как суммы их острых углов равны прямому углу. Обозначим отрезки $AL = AP = a$, $BL = BM = b$, $CM = CN = c$, $DN = DP = d$. Поэтому $ad = bc = OP^2 = OM^2$;



$$a : c = b : d. \qquad (1)$$

Точки L, O, N принадлежат одной прямой, перпендикулярной к основаниям трапеции. Если Q — точка пересечения прямых AC и LN, то $AQ : QC = a : c = LQ : QN$.

Пусть Q^1 — точка пересечения прямых BD и LN. Тогда

$$BQ^1 : Q^1D = b : d.$$

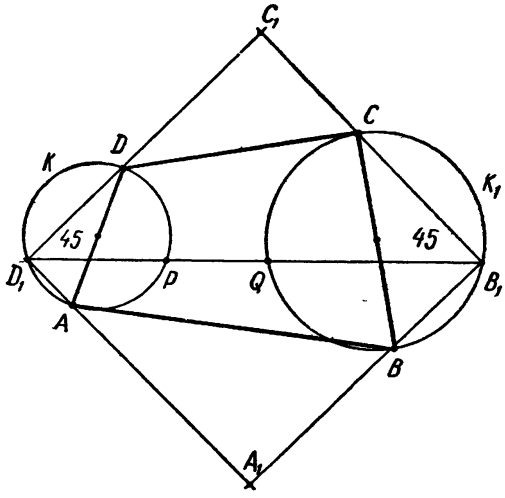
В силу условия (1) точки Q и Q^1 совпадают между собой, то есть прямая, соединяющая точки касания оснований, проходит через пересечения диагоналей. Будем теперь считать точку Q только пересечением прямых AC и MP. Через точку C проведем прямую, параллельную прямой AD. Обозначим через R и S точки пересечения этой прямой с окружностью и T—с прямой PM. Имеем: $\smile SP = \smile PR$. Углы MPD и PMC измеряются $\frac{1}{2} \smile PNM$. Следовательно, $\angle MTC$ измеряется половиною той же дуги: $\triangle MTC$—равнобедренный. Из подобия треугольников APQ и CTQ и из равенства $CM = CT$ следует: $AQ : QC = a : c$. А это значит, что точка Q находится в пересечении диагоналей трапеции.

34. Шахматист, занявший второе место, не мог набрать больше 6 очков, так как не меньше 6 очков набрали четыре шахматиста, занявшие последние места и игравшие только между собой.

Наибольшее число очков, которое мог набрать участник этого турнира, равно 7. Если шахматист, занявший первое

место, набрал 7 очков, то занявший второе место не мог иметь более шести очков из-за проигрыша первому. В соответствии с условием задачи он должен набрать 6 очков. Если участник, занявший первое место, набрал 6,5 или менее очков, то занявший второе место не мог опять иметь более и менее 6 очков.

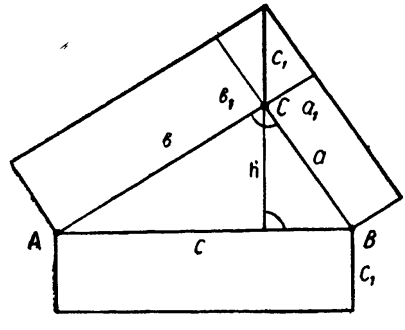
35. Пусть вершины данного четырехугольника $ABCD$ принадлежат соответственно сторонам искомого квадрата $D_1A_1B_1C_1$. Тогда вершина D_1 принадлежит окружности K с диаметром AD, а вершина B_1 — окружности K_1 с диаметром BC; диагональ B_1D_1 пересекает эти окружности K и K_1 в точках D_1, B_1, P, Q, где P — середина полуокружности, не содержащей точку D_1 на окружности K, а Q — середина полуокружности, не содержащей точку B_1 на окружности K_1.



2) Пусть $\angle B'A'D' = \alpha$, $\angle B'C'D' = \beta$, $\angle C'A'D' = \alpha_1$, $\angle A'C'D' = \beta_1$.

Если $A_1B_1C_1D_1$—произвольный квадрат, $\cup A_1A'B$ окружности K вмещает угол α, $\cup C_1C'D$ окружности K_1 вмещает угол β, $\cup AP$ окружности K, не содержащая точку A', вмещает угол α_1, $\cup D_1Q$ окружности K_1, не содержащая точку C', вмещает угол β_1, то четырехугольник $A'B'C'D'$ подобен данному.

36. Обозначим стороны прямоугольников a, a_1; b, b_1; c, c_1. Имеем $a = ha_1$, $b = hb_1$, $c = hc_1$. Следовательно, треугольник со сторонами a_1, b_1, c_1 подобен данному треугольнику. Пользуясь этим условием, получим доказательство предложенного утверждения.



37. Пусть у выпуклого четырехугольника $ABCD$ точки M, P, N, Q середины сторон AB, BC, CD, DA, точка E—

середина диагонали AC, точка O — в пересечении отрезков PQ и MN.

При данном условии для решения задачи достаточно доказать совпадение точек O и E. Если бы эти точки не совпадали, то

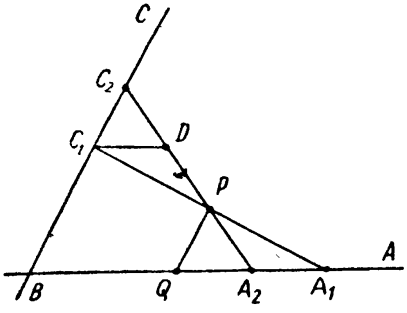
$$ME + EN > MN,\ PE + EQ > PQ,$$
$$BP + QD + BM + ND > MN + PQ.$$

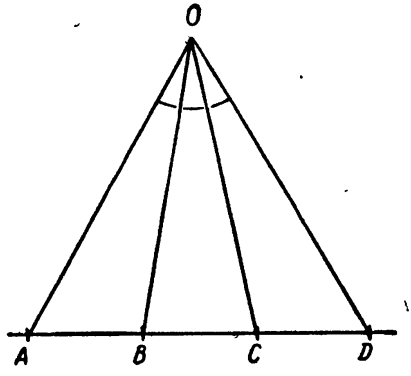
А в соответствии с условием задачи,

$$BP + QD + BM + ND = MN + PQ$$

противоречит последнему неравенству.

38. Через точку P, данную внутри угла ABC, проведем прямую, параллельную стороне BC, до пересечения со стороной AB в точке Q; отложим отрезок $QA_1 = BQ$; через точку A_1 проведем прямую A_1P до пересечения со стороной BC в точке C_1. Треугольник A_1BC_1 — искомый. Если прямая, проходящая через точку P, отсекает треугольник A_2BC_2, то на стороне A_2C_2 есть точка D, такая, что $C_1D \parallel BA$, $\triangle A_1A_2P = \triangle C_1DP$, пл. $\triangle A_2BC_2 >$ пл. $\triangle A_1BC_1$.





39. Пусть AB, BC, CD — данные отрезки, O — искомая точка, т. е. $\angle AOB = \angle BOC = \angle COD$.

В треугольнике AOC OB является биссектрисой, значит $\frac{AO}{OC} = \frac{AB}{BC} = l_1$.

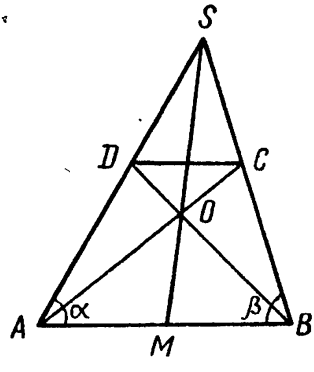
Точно также из треугольника BOD вытекает, что

$$\frac{OB}{OD} = \frac{BC}{CD} = l_2.$$

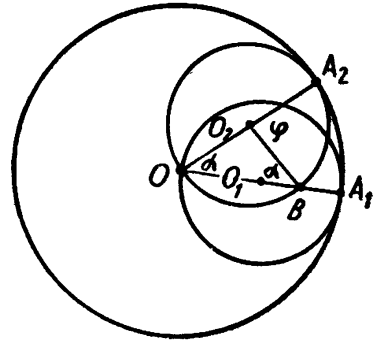
Таким образом, точка O лежит на пересечении двух окружностей, одна из которых есть геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до данных точек A и C равно l_1, а другая — геометрическое место точек, отношение расстояний от которых до точек B и D равно l_2.

Построив указанные окружности, найдем точку O.

40. Если $ABCD$ — искомая трапеция, $AB \parallel DC$, O — точка пересечения диагоналей, то $\frac{OA}{OB} = \frac{AC}{BD}$. Можно построить $\triangle A'B'C' \sim \triangle ABC$, где S — точка пересечения прямых AD и BC с углами $\angle B'A'D' = \alpha$ и $\angle A'B'C' = \beta$, точка O' в пересечении диагоналей и точка M' — в пересечении прямых $A'B'$ с $S'O'$. Здесь $A'M' = M'B'$. Точку O' можно найти в пересечении прямой $S'O'$ с окружностью Аполлония — геометрическим местом точек P', $\frac{P'A'}{P'B'} = \frac{AC}{BD}$. Получим трапецию $A'B'C'D' \sim$ трапеции $ABCD$. После этого легко построить и искомую фигуру.



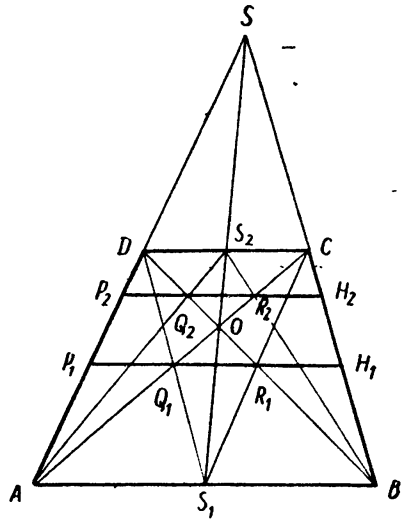
41. Пусть в начальный момент точка A_1 катящегося круга находится в точке соприкосновения этого круга с данным неподвижным. Диаметрально противоположная точке A_1 катящегося круга находится в центре O данного неподвижного круга. Если A_2 — точка соприкосновения катящегося круга с данным неподвижным в другой момент, O_2 — центр этого круга, а точка A_1 заняла положение B и радиальные меры углов $\alpha = \angle A_1OA_2$, $\varphi = \angle BOA_2$, то длина $\cup A_1A_2 = \alpha 2R$, длина $\cup BA_2 = \varphi R$, $OO_2 = O_2B = R$. Это значит, что точка B находится на диаметре OA_1 неподвижного круга.



Ответ: каждая точка катящегося круга описывает диаметр данного неподвижного круга.

42. В трапеции $ABCD$ сторона $AB \parallel CD$, точка O — в

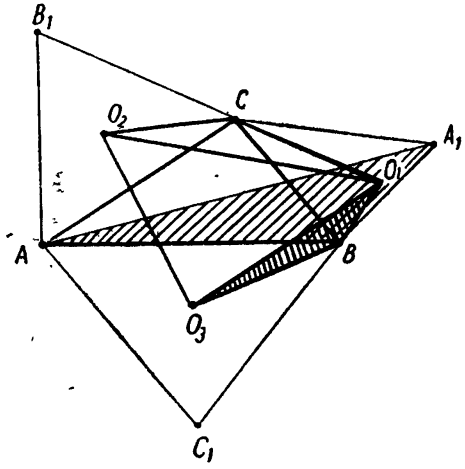
пересечении диагоналей. Если S — точка пересечения прямых AD и BC, то прямая OS пересекает основания AB и DC в точках S_1 и S_2 — серединах этих оснований. Точка Q_1 в пересечении прямых AC и S_1D и точка R_1 — в пересечении прямых BD и S_1C делят на три равных части отрезок P_1H_1 с концами на боковых сторонах трапеции и параллельный основанию трапеции.

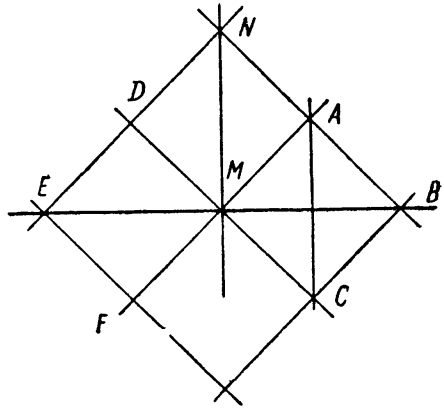


Это можно доказать, пользуясь тем, что $\triangle AS_1Q_1 \sim \triangle CDQ_1$, $\triangle S_1BR_1 \sim \triangle CDR_1$, $AS_1 = S_1B$, $CS_2 = S_2D$.

Если точка Q_2 лежит в пересечении прямых AS_2 и BD, точка R_2 — в пересечении прямых AC и BS_2, то они также делят на три равные части отрезок P_2H_2 с концами на боковых сторонах трапеции.

43. Пусть ABC — данный треугольник, равносторонние треугольники ABC_1, BCA_1, CAB_1; O_3, O_1, O_2 соответственно точки пересечения высот.





$A_1B : O_1B = \sqrt{3}$, $AB : O_3B = \sqrt{3}$, $\angle ABA_1 = \angle O_3BO_1$, $\triangle ABA_1 \sim \triangle O_3BO_1$, $A_1A = O_1O_3\sqrt{3}$.
Точно так же $AA_1 = O_1O_2\sqrt{3}$, $O_1O_2 = O_1O_3$.
Аналогично, $O_1O_2 = O_2O_3$.

44. Если с помощью только одной двусторонней линейки построить параллелограмм, то все высоты этого параллелограмма равны расстоянию между краями линейки, полученная фигура — ромб. Используя свойство диагоналей ромба, мы можем построить искомый перпендикуляр.

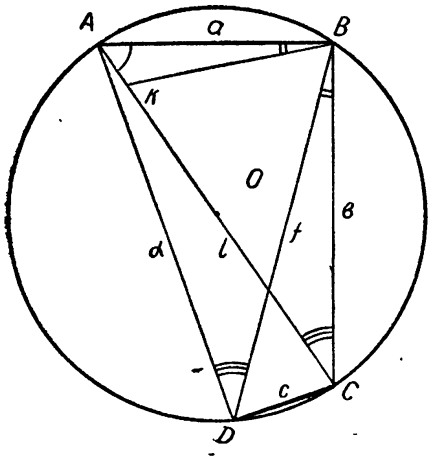
Построим два ромба $MABC$ и $MDEF$ с общей вершиной в данной точке M и диагоналями MB и ME, лежащими на прямой b. $AC \perp MB$. Продолжим стороны ромбов ED и BA до пересечения в точке N. $MN \parallel AC$, так как $\angle DNA = \angle MAB$ и MN и AC — диагонали соответствующих ромбов.

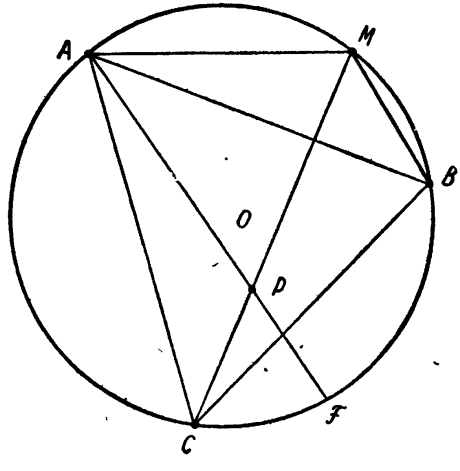
45. Строим $\angle ABK = \angle CBD$. $\triangle ABK \sim \triangle BDC$;

$$\frac{AB}{BD} = \frac{AK}{DC};\ a \cdot c = AK \cdot f.$$

$$\triangle BKC \sim \triangle ABD.\ \frac{BC}{KC} = \frac{BD}{AD};\ b \cdot d = KC \cdot f;$$

$$ac + bd = f(AK + KC),\ fl = ac + bd.$$



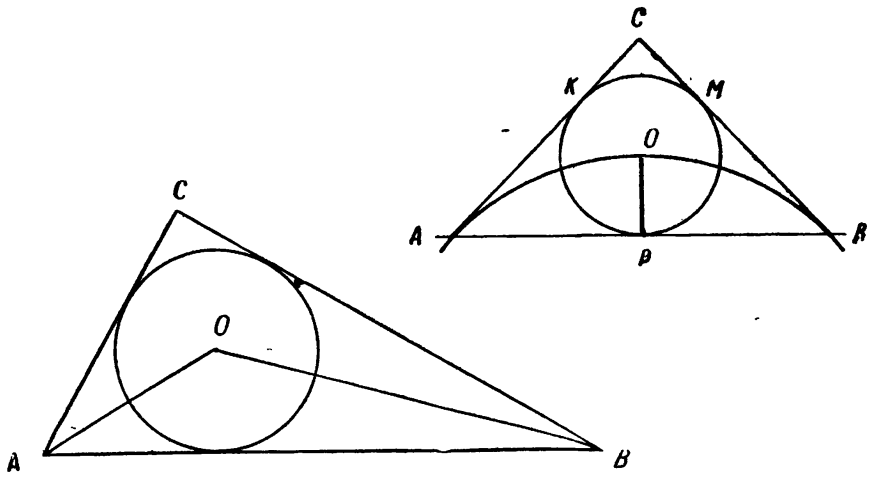


46. На MC отложим $MP = AM$ и рассмотрим $\triangle AMB$ и $\triangle APC$. $AM = AP$; $AC = AB$; $\angle PAC = \angle MAB$, так как $\smile BM = \smile CF$.

47. $\angle OAB + \angle OBA = \frac{1}{2} \cdot 90° = 45°$; $\angle AOB = \angle 135°$.

Центры искомых окружностей лежат на дуге окружности, из точек которой гипотенуза видна под углом 135°. Радиус вписанной окружности в каждый прямоугольный

треугольник — расстояние соответствующей точки ГМТ центров до гипотенузы. Ясно, что середина этой дуги находится от гипотенузы на наибольшем расстоянии.



Остается показать, что окружность этого радиуса вписывается в равнобедренный треугольник с данной гипотенузой.

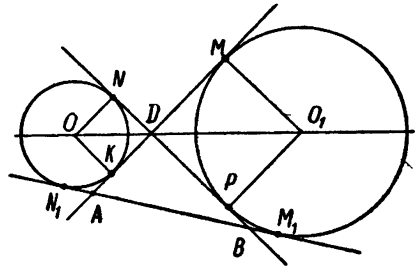
Действительно, так как центр этой окружности лежит на перпендикуляре OP, восстановленном из середины гипотенузы, то отрезки $AK = BM = AP$.

Кроме этого, $CK = CM$. Поэтому $AC = CB$.

48.

$$AM = AM_1;$$

$$AM = AK + KM = AK + (R + r);$$



$$AM_1 = AB + BM_1;$$

$$AB + BM_1 = AK + (R + r);$$

$$AB - (R + r) = AK - BM_1;$$

$$BN = BN_1;\ BN_1 = AB + AN_1;$$

$$BN = BP + PN = BP + (R + r);$$
$$AB + AN_1 = BP + (R + r);$$
$$AB - (R + r) = BP - N_1A.$$

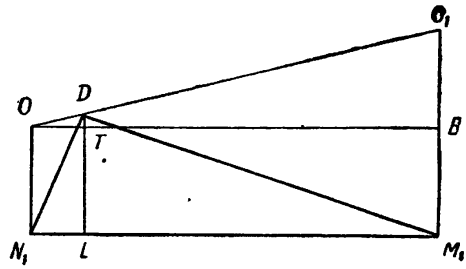
Так как $BP = BM_1$ и $AK = AN_1$, то $AK - BM_1 = BM_1 - AK$, т. е. $AK = BM_1$.

Из этого следует, что

$$AB = R + r.$$

49. Рассмотрим чертеж к предыдущей задаче.

Проведем в $\triangle M_1DN_1$ $DL \perp M_1N_1$. Заметим, что $OD = r\sqrt{2}$; $O_1D = R\sqrt{2}$; $O_1E = R - r$ и $DT = DL - r$.



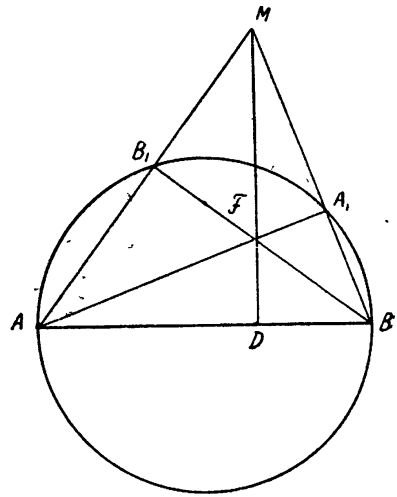
$$\triangle OO_1E \sim \triangle ODT.$$

$$\frac{R-r}{DL-r} = \frac{R\sqrt{2} + r\sqrt{2}}{r\sqrt{2}};$$

$$DL = \frac{2Rr}{R+r};$$

$$S_{\triangle N_1DM_1} = Rr.$$

50. На отрезке a строим два равносторонних треугольника ABC и ABD с общей стороной $AB = a$. На стороне BC строим отрезок $BM = ma$. Соединяем точки M и D. MD пересечет AB в точке P и $AP = \frac{a}{m+1}$. Это вытекает из подобия $\triangle DAP$ и $\triangle PMB$.



51. Пусть MD — искомый перпендикуляр, тогда MD — высота $\triangle AMB$, но AA_1 и BB_1 — также высоты этого треугольника, а точка F — его ортоцентр.

Из этого вытекает построение: строим AA_1 и BB_1. Через точки M и F проводим искомый перпендикуляр. Задача имеет единственное решение, если каждый из углов MAB и MBA не превосходит $\frac{\pi}{2}$.

1. $9^{9^9} = (8+1)^{9^9} = 8m+1$, где m — целое число.

Отсюда:

$$7^{9^{9^9}} = 7^{8m+1} = (7^4)^{2m}\cdot 7 = 2401^{2m}\cdot 7 = (2400+1)^{2m}\cdot 7 =$$
$$= (100n+1)\cdot 7 = 100\cdot 7n + 7,$$

где n — целое число.

Из этого видно, что две последние цифры данного числа образуют совокупность 07.

2. Выражение в первой скобке есть геометрическая прогрессия с первым членом 1 и знаменателем 10.

$$(10^n + 10^{n-1} + \ldots + 1)\cdot(10^{n+1}+5)+1 =$$
$$= \frac{10^{n+1}-1}{9}\cdot(10^{n+1}+5)+1 = \frac{10^{2(n+1)}+4\cdot 10^{n+1}+4}{9} =$$
$$\frac{(10^{n+1}+2)^2}{(3)^2} = \left(\frac{10^{n+1}+2}{3}\right)^2.$$

3. По условию задачи $100 \leqslant N^2 < 1000$, следовательно, $10 \leqslant N \leqslant 31$.

Пусть
$$N^2 = 100x + 10y + z \qquad (1)$$
$$xyz = N - 1; \qquad (2)$$

$z \neq 0$, так как произведение xyz в этом случае равно нулю. z — нечетное число, так как в противном случае четно N [из (1)], а $N-1$, равное xyz, нечетно, что невозможно. Итак, z — нечетно, следовательно, N — нечетно, $N-1$ — четно. Кроме того, z может быть равным только 1, 5 или 9. Пользуясь таблицей квадратов, выбираем трехзначные числа, оканчивающиеся на 1, 5 или 9, произведение цифр которых меньше 31: 121, 225, 361, 441.

Второму условию удовлетворяет только 361.

4. Докажем способом математической индукции. Пусть $n = 2k$, где $k = 1$, тогда утверждение справедливо:

$$13^2 = 169 = 7\cdot 24 + 1.$$

Допустим, что для некоторого k выполняется равенство: $13^{2k} = 7m + 1$; (m — число натуральное).

Переходим от k к $k+1$.

В таком случае:

$$13^{2(k+1)} = 13^{2k}\cdot 13^2 = (7m+1)\cdot(7\cdot 24+1) =$$
$$= 7(169m+24)+1;$$

Следовательно, предположение справедливо.

5. Обозначим через S_n сумму

$$S_n = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots + \frac{1}{n^2}.$$

Так как

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n(n-1)} = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

то

$$\frac{1}{2^2} < 1 - \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{3^2} < \frac{1}{2} - \frac{1}{3},$$

$$\frac{1}{4^2} < \frac{1}{3} - \frac{1}{4},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{1}{n^2} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}.$$

Складывая эти неравенства, получим:

$$S_n < 1 - \frac{1}{n}; \text{ отсюда } S_n < 1.$$

6. Можно считать, что числа расположены в порядке возрастания:

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \ldots < a_n.$$

Рассмотрим числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

$$a_n + a_1,\ a_n + a_2,\ a_n + a_3,\ a_n + a_4,\ \ldots,\ a_n + a_{n-1};$$

$$a_n + a_{n-1} + a_1,\ a_n + a_{n-1} + a_2,\ \ldots,\ a_n + a_{n-1} + a_{n-2}.$$

Продолжая составление сумм подобным способом, получим:

$$a_n + a_{n-1} + \ldots + a_{n-k} + a_1,\ a_n + a_{n-1} + \ldots + a_{n-k} + a_2,\ \ldots,\ a_n + a_{n-1} + \ldots + a_{n-k} + a_{n-k-1}$$

и т. д. Наконец:

$$a_n + a_{n-1} + a_{n-2} + \ldots + a_1.$$

Очевидно, что числа возрастают и, следовательно, различны. Количество этих чисел $n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 1 = n\frac{(n+1)}{2}$ соответствует требованиям задачи.

Замечание: Первые n натуральных чисел составляют пример n положительных различных чисел, из которых нельзя составить более чем $n\frac{(n+1)}{2}$ различных сумм.

7. Согласно условию,

$$10x + y = x^2 + xy + y^2 \text{ или}$$
$$10x + y + xy = (x + y)^2.$$

Так как

$$x \leqslant 9 \text{ и } y \leqslant 9,$$

то $10x + y + xy \leqslant 180$, $(x + y)^2 \leqslant 180$,

а тогда

$$x + y \leqslant 13.$$

Но при $x + y = 13$ наибольшее значение выражение $10x + y + xy$ получит, очевидно, при $x = 9$, $y = 4$:

$$10x + y + xy \leqslant 130;$$

следовательно, $(x + y)^2 \leqslant 130$ и $x + y \leqslant 11$.

При $x + y = 11$

$$10x + y + xy \leqslant 110,$$

откуда $x + y \leqslant 10$.

При $x + y = 10$ значения $x = 9$, $y = 1$ удовлетворяют условию задачи.

При $x + y = 9$ условию задачи удовлетворяют $x = 6$, $y = 3$.

При $x + y = 8$, $x + y = 7$, $x + y = 6$, $x + y = 5$, как нетрудно в этом убедиться, решений нет.

При $x + y = 4$ имеем решение $x = 1$, $y = 3$.

Ответ: 91; 63; 13.

8. Согласно условию задачи сумма слагаемых представляется так: $1 + k + (1 + k)k + (1 + k)^2 k + (1 + k)^3 k + \ldots + (1 + k)^{n-1} k + (1 + k)^{n-2} k = 531441 = 3^{12}$, где n — число слагаемых.

Так как последнее слагаемое равно $(1 + k)^{n-2} \cdot k$, то сумма всех ему предыдущих $(1 + k)^{n-2}$; тогда $3^{12} = (1 + k)^{n-2} + (1 + k)^{n-2} \cdot k = (1 + k)^{n-2}(1 + k) = (1 + k)^{n-1}$, или $1 + k = \sqrt[n-1]{3^{12}} = 3^{\frac{12}{n-1}}$.

Но число слагаемых должно быть не меньше четырех. Делаем испытание, зная, что $\frac{12}{n-1}$ есть число целое и что делители 12 есть 2, 3, 4, 6, 12:

1) если $n - 1 = 3$, то $n_1 = 4$; тогда $1 + k = 3^4$; $k_1 = 80$;

2) если $n - 1 = 4$, то $n_2 = 5$; тогда $1 + k = 3^3$; $k_2 = 26$;

3) если $n-1=6$, то $n_3=7$; тогда $1+k=3^2$; $k_3=8$;

4) если $n-1=12$, то $n_4=13$; тогда $1+k=3$; $k_4=2$.

Итак, получаем четыре значения для множителя k (80, 26, 8 и 2) и соответственно им возможное число слагаемых (4, 5, 7, 13).

9. Так как $\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}<\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}=\frac{1}{n}$, то

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n-1}+\left(\frac{1}{3n}+\frac{1}{3n+1}\right)<$$

$$<\frac{1}{n}+\underbrace{\frac{1}{n}+\ldots+\frac{1}{n}}_{2n\text{ раз}}=2.$$

С другой стороны

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{3n+1}=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{3n+1}\right)+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{1}{n+2}+\frac{1}{3n}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{n+1}\right)\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{4n+2}{(2n+1)^2-n^2}+\right.$$

$$\left.+\frac{4n+2}{(2n+1)^2-(n-1)^2}+\ldots+\frac{4n+2}{(2n+1)^2-n^2}\right]>$$

$$>\frac{1}{2}\left[\underbrace{\frac{4n+2}{(2n+1)^2}+\frac{4n+2}{(2n+1)^2}+\ldots+\frac{4n+2}{(2n+1)^2}}_{(2n+1)\text{ раз}}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}(2n+1)\frac{4n+2}{(2n+1)^2}=1.$$

10. Покажем, что $2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}<\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}$. В самом деле, $2\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}=$

$$=\frac{2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Точно также, $2\sqrt{n}-2\sqrt{n-1}=$

$$=\frac{2(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}=\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}>$$

$$>\frac{2}{\sqrt{n}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Теперь имеем:

$$1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ \dots\ +\frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}}>1+2[(\sqrt{3}-\sqrt{2})+$$
$$+(\sqrt{4}-\sqrt{3})+\ \dots\ +(\sqrt{1\,000\,001}-\sqrt{1\,000\,000})]=$$
$$=1+2(\sqrt{1\,000\,001}-\sqrt{2})>1+2\cdot 1000-\sqrt{8}>2000-$$
$$-3+1=1998.$$

В то же время $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\ \dots\ +\frac{1}{\sqrt{1\,000\,000}}<1+$
$+2[(\sqrt{2}-1)+(\sqrt{3}-\sqrt{2})+\ \dots\ +(\sqrt{1\,000\,000}-\sqrt{999\,999})]=$
$=1+2(\sqrt{1\,000\,000}-1)=1+2\cdot 999=1999.$

Таким образом, целая часть указанной суммы равна 1998.

11. Доказательство проводится методом индукции. Пусть неравенство верно для k множителей. Тогда $(1+x_1)(1+x_2)\ \dots\ (1+x_k)(1+x_{k+1})\geqslant(1+x_1+x_2+$ $+\dots\ +x_k)(1+x_{k+1})=(1+x_1+x_2+\ \dots\ +x_k+x_{k+1})+$ $+(x_1+\ \dots\ +x_k)x_{k+1}\geqslant 1+x_1+x_2+\ \dots\ +x_{k+1}$, так как $(x_1+x_2+\ \dots\ +x_k)x_{k+1}\geqslant 0$, ввиду того, что все x_i имеют один и тот же знак.

12. $$\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n+2}}=\frac{\sqrt{n+2}-\sqrt{n}}{2}.$$

$$S_n=\frac{1}{2}[(\sqrt{3}-\sqrt{1})+(\sqrt{5}-\sqrt{3})+\ \dots\ +(\sqrt{2n+1}-$$
$$-\sqrt{2n-1})]=\frac{1}{2}(\sqrt{2n+1}-1).$$

13. Положим $\sqrt{m+\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}}=\sqrt{x}+\sqrt{y}+$ $+\sqrt{z}$. Возведем обе части равенства в квадрат. Получим $x+y+z=m$, $2\sqrt{xy}=\sqrt{a}$, $2\sqrt{xz}=\sqrt{b}$, $2\sqrt{yz}=$ $=\sqrt{c}$.

Решим данную систему относительно x, y, z:

$$x=\frac{\sqrt{abc}}{2c},\ y=\frac{\sqrt{abc}}{2b},\ z=\frac{\sqrt{abc}}{2a},$$

т. е. abc должно быть точным квадратом:

$$m=\frac{ab+ac+bc}{2\sqrt{abc}}.$$

14. Рассмотрим неравенство:

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}<\frac{(a-b)^2}{8b};$$

$$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2<\frac{(a-b)^2}{4b};$$

$$\sqrt{a}-\sqrt{b}<\frac{a-b}{2\sqrt{b}};\quad \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{b}}>1. \qquad (1)$$

Рассмотрим неравенство:

$$\frac{(a-b)^2}{8a}<\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab};$$

$$\frac{(a-b)^2}{4a}<(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2;$$

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{2\sqrt{a}}<1. \qquad (2)$$

Неравенства (1) и (2) справедливы, так как $a>b>0$.

15. Умножив знаменатель на $a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4}$ (a, b и c — неопределенные коэффициенты): $(1+3\sqrt[3]{2}-2\sqrt[3]{4})(a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4})$ и сделав приведение подобных, получим $(a-4b+6c)+(3a+b-4c)\sqrt[3]{2}-(2a-3b-c)\sqrt[3]{4}$.

$$\begin{cases} 3a+b-4c=0 \\ 2a-3b-c=0 \end{cases}$$

1) Исключив b, получим: $11a=13c$; $\frac{a}{13}=\frac{c}{11}$.

Исключив из системы (1) c, получим: $\frac{a}{13}=\frac{b}{5}$; $\frac{a}{13}=\frac{c}{11}=\frac{b}{5}$. Приняв коэффициент пропорциональности равным единице, получим: $a=13$; $b=5$; $c=11$.

Следовательно, умножив числитель и знаменатель данной дроби на $13+5\sqrt[3]{2}+11\sqrt[3]{4}$ и, сделав преобразования, получим:

$$13+5\sqrt[3]{2}+11\sqrt[3]{4}.$$

16. Возведем обе части этого равенства в квадрат;

$$y^2=(x+2\sqrt{x-1})^{-1}+2(x+2\sqrt{x-1})^{-\frac{1}{2}}\cdot(x-$$

$$-2\sqrt{x-1})^{-\frac{1}{2}}+(x-2\sqrt{x-1})^{-1}=$$

$$=\frac{1}{x+2\sqrt{x-1}}+\frac{1}{x-2\sqrt{x-1}}+2[x^2-4(x-1)]^{-\frac{1}{2}}=$$

$$=\frac{2x}{x^2-4(x-1)}+\frac{2}{\sqrt{x^2-4x+4}}=\frac{2x}{x^2-4x+4}+\frac{2}{|x-2|}.$$

1) Если $1 \leqslant x < 2$, то $|x-2| = -(x-2)$ и поэтому

$$y^2 = \frac{2x}{(x-2)^2} - \frac{2}{x-2} = \frac{2x}{(x-2)^2} - \frac{2(x-2)}{(x-2)^2} = \frac{4}{(x-2)^2},$$

а так как $y > 0$, то y есть арифметическое значение корня квадратного из этого выражения. Следовательно,

$$y = \sqrt{\frac{4}{(x-2)^2}} = \frac{2}{|x-2|} = \frac{2}{-(x-2)} = \frac{2}{2-x}.$$

2) Если $x > 2$, то $x-2 > 0$, значит $|x-2| = x-2$, а поэтому $y^2 = \frac{2x}{x^2-4x+4} + \frac{2}{x-2} = \frac{2x}{(x-2)^2} + \frac{2(x-2)}{(x-2)^2} = \frac{4(x-1)}{(x-2)^2}$

и, следовательно,

$$y = \sqrt{\frac{4(x-1)}{(x-2)^2}} = \frac{2\sqrt{x-1}}{|x-2|} = \frac{2\sqrt{x-1}}{x-2}.$$

Итак,

$$y = \begin{cases} \dfrac{2}{2-x} & \text{при } 1 \leqslant x < 2 \\ \dfrac{2\sqrt{x-1}}{x-2} & \text{при } x > 2. \end{cases}$$

При $x = 2$ данное выражение не имеет смысла.

17. Пусть данная дробь имеет одно и то же постоянное численное значение при любых численных значениях x, которое обозначим через m, т. е.

$$\frac{ax^2+bx+c}{a_1x^2+b_1x+c_1} = m,$$

откуда

$$(a-a_1m)x^2 + (b-b_1m)x + (c-c_1m) = 0. \qquad (1)$$

Равенство (1) тождественно равно нулю по условию при любом значении x; это возможно только тогда, когда коэффициенты при x^2, x и свободный член одновременно равны нулю, т. е.

$$a - a_1m = 0,\ b - b_1m = 0,\ c - c_1m = 0,$$

откуда

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1}. \qquad (2)$$

Но если соотношение (2) выполнено, то данная дробь не зависит от x, следовательно, соотношение (2) является условием не только необходимым, но и достаточным.

18. Из данного равенства находим:

$$(y-2)x^2+(4y-6)x+5y-6=0.$$

Установим, при каких значениях y x — действительное число. Если $y\neq 2$, то

$$x=\frac{3-2y\pm\sqrt{(3-2y)^2-(y-2)(5y-6)}}{y-2}=$$

$$=\frac{3-2y\pm\sqrt{-(y^2-4y+3)}}{y-2}.$$

Для того, чтобы x было действительным числом, необходимо и достаточно, чтобы $-(y^2-4y+3)\geqslant 0$, или $-(y-3)(y-1)\geqslant 0$. Это неравенство удовлетворяется при $1\leqslant y\leqslant 3$; так как при $x=-3$ $y=3$, а при $x=-1$ $y=1$, то 1 и 3 — соответственно наименьшее и наибольшее значения функции.

19. Представим данный трехчлен в таком виде:

$$x^2+5x+16=x^2+5x-36+36+16=(x+9)(x-4)+52. \quad (1)$$

Если при некотором целом значении x данный многочлен делится на 169, то при этом же значении x он делится на 13. Следовательно, при этом значении x выражение $(x+9)(x-4)$ должно делиться на 13, ибо 52 делится на 13. Значит, по крайней мере один из сомножителей произведения $(x+9)(x-4)$ делится на 13. Но $(x+9)-(x-4)=13$. Поэтому и другой сомножитель делится на 13, а следовательно, и произведение делится на 169. Но так как 52 на 169 не делится, то двучлен (1) на 169 ни при каком целом x не может делиться.

20. Пусть $x=ty$. Получим $\sqrt{t}\,y^2(t\sqrt{t}+1)=336$. $y^2(t\sqrt{t}+1)=112$.

$$x=18;\ y=2.$$

21. Полагая $8-x=a^4$ и $89+x=b^4$, получим систему

$$\begin{cases} a+b=5 \\ a^4+b^4=97. \end{cases}$$

Пользуясь тем, что $a^4+b^4=(a^2+b^2)^2-2a^2b^2=[(a+b)^2-2ab]^2-2a^2b^2$, и тем, что $a+b=5$, получим уравнение $(25-2ab)^2-2a^2b^2=97$, или $2a^2b^2-100ab+528=0$, или $a^2b^2-50ab+264=0$.

Отсюда: 1) $ab=6$ и 2) $ab=44$.

Теперь остается решить две системы:

$$1)\ \begin{cases} a+b=5 \\ ab=6 \end{cases} \quad \text{и} \quad 2)\ \begin{cases} a+b=5 \\ ab=44. \end{cases}$$

Первая система дает $a=2$, $b=3$ и $a=3$, $b=2$.

Вторая система действительных решений не имеет.

Пользуясь, например, уравнением $8-x=a^4$ и полученными значениями неизвестного a, найдем действительные корни данного иррационального уравнения:

1) $x_1=-8$ и 2) $x_2=-73$.

22. Возведя обе части уравнения в квадрат, получим:

$$a-\sqrt{a+x}=x^2;$$

$$a-x^2=\sqrt{a+x};$$

$$x^4-2ax^2-x+a^2-a=0.$$

Решим это уравнение относительно a:

$$a^2-a(2x^2+1)+x^4-x=0.$$

Разложив квадратный трехчлен на линейные множители, получим: $(x^2+x-a+1)(x^2-x-a)=0$.

Находим: $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{4a-3}}{2}$;

$$x_{3,4}=\frac{1\pm\sqrt{4a+1}}{2}.$$

23. Так как p есть любое натуральное число, большее 1, то должно быть $b+x>0$ и $x>0$. Имеем: $\sqrt[p]{b+x}\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{x}\right)=\frac{\sqrt[p]{x}}{a}$.

Отсюда: $\sqrt[p]{b+x}\cdot\frac{b+x}{bx}=\frac{\sqrt[p]{x}}{a}$; $\left(\frac{b+x}{x}\right)^{1+\frac{1}{p}}=\frac{b}{a}$.

Так как $\frac{b+x}{x}>0$, то и $\frac{b}{a}>0$. Отсюда $x=\frac{b}{\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{p}{p+1}}-1}$.

Для $x>0$ должно быть $b>a$; если $a<0$ и $b<0$, то $|a|>|b|$.

Для существования решения нужно, чтобы a и b были одного знака и чтобы $b>a$.

24. При $a=0$ и $a=1$ уравнение имеет два двукратных корня: $x_{1,2}=\pm 0$, $x_{3,4}=1$. Если $a\neq 0$ и $a\neq 1$, то ни 0 ни 1 не являются корнями данного уравнения. Непосредственной проверкой легко убедиться, что если x_1 — корень данного уравнения, то $\frac{1}{x_1}$, $1-x_1$ тоже являются его корнями. Отсюда вытекает, что и $\frac{1}{1-x_1}$, $1-\frac{1}{x_1}$ и $\frac{1}{1-\frac{1}{x_1}}$ также являются корнями данного уравнения.

Так как уравнение при $a\neq 0$ и $a\neq 1$ — шестой степени, то оно имеет шесть корней, причем, зная один из них, легко получить остальные корни. Но, очевидно, что a — корень данного уравнения. Поэтому имеем: $x_1=a$, $x_2=\frac{1}{a}$, $x_3=1-a$; $x_4=\frac{1}{1-a}$, $x_5=1-\frac{1}{a}$, $x_6=\frac{a}{a-1}$.

25. $x>2$, $y>1$ — допустимые значения неизвестных. Преобразуем: $4\sqrt{x-2}+\frac{36}{\sqrt{x-2}}=\left(2\sqrt[4]{x-2}-\frac{6}{\sqrt[4]{x-2}}\right)^2+24$.

$$\sqrt{y-1}+\frac{4}{\sqrt{y-1}}=\left(\sqrt[4]{y-1}-\frac{2}{\sqrt[4]{y-1}}\right)^2+4.$$

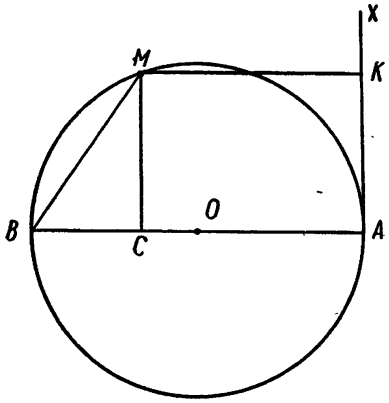
Получим уравнение:

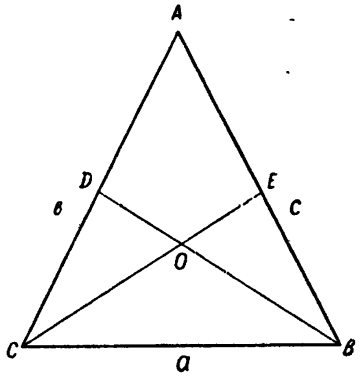
$$\left(2\sqrt[4]{x-2}-\frac{6}{\sqrt[4]{x-2}}\right)^2+\left(\sqrt[4]{y-1}-\frac{2}{\sqrt[4]{y-1}}\right)^2=0.$$

Из этого следует, что $2\sqrt[4]{x-2}-\frac{6}{\sqrt[4]{x-2}}=0$ и $\sqrt[4]{y-1}-\frac{2}{\sqrt[4]{y-1}}=0$.

Получим решение: $x=11$, $y=5$.

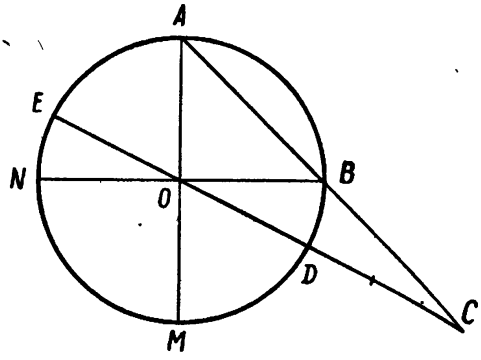
26. Допустим, что точка M найдена, тогда $MK = MB$ (1) и $MB^2 = AB \cdot BC$. Но $MK = 2R - BC$. Получим: $(2R - BC)^2 = 2R \cdot BC$ или $BC^2 - 6RBC + 4R^2 = 0$, так как $BC < 2R$. Откуда $BC = 3R - \sqrt{9R^2 - 4R^2}$. Следовательно, BC можно построить как разность двух отрезков: $3R$ и $\sqrt{9R^2 - 4R^2}$.





27. Известно, что $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}$. BD и CE — медианы. Вычислим стороны $\triangle COB$. $BC = a$; $BO = \frac{2}{3} BD = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{2a^2 + 2c^2 - b^2}$; $CO = \frac{1}{3}\sqrt{2a^2 + 2b^2 - c^2}$. $BO^2 + CO^2 = \frac{1}{9}(4a^2 + 2b^2 + 2c^2 - b^2 - c^2) = \frac{1}{9}(4a^2 + b^2 + c^2) = a^2$, т. е. $CO \perp OB$.

28. Проводим два взаимно перпендикулярных диаметра AM и BN. Хорду AB продолжаем на расстояние $BC = AB$. Точку C соединяем с центром O. Отрезок $\frac{CD}{2} = a_{10}$. Докажем это. $AB = BC = R\sqrt{2}$; $CD \cdot CE = AC \cdot BC$;



$$CD \cdot (2R + CD) = 4R^2;\ CD^2 + 2RCD - 4R^2 = 0.$$

$$CD = R(\sqrt{5} - 1).$$

$$\frac{CD}{2} = \frac{R(\sqrt{5} - 1)}{2} = a_{10}.$$

29. Периметр трапеции $P = \smile BM + MN + \smile NO + OB$. (1)
В $\triangle MO_1O$ гипотенуза $OM = R$, а катет $OO_1 = \frac{R}{2}$; следовательно, $\angle OMO_1 = 30°$. Но тогда и $\angle BOM = 30°$, т. е. $\smile BM$ равна $\frac{1}{12}$ окружности O.

$$\smile BM = \frac{2\pi R}{12} = \frac{\pi R}{6}. \tag{2}$$

Из $\triangle MO_1O$ находим $MO_1 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$. Тогда $MN = MO_1 -$

$$- NO_1 = \frac{R\sqrt{3}}{2} - \frac{R}{2} = \frac{R(\sqrt{3}-1)}{2}. \tag{3}$$

Далее находим: $\smile NO = \frac{1}{4} 2\pi \cdot \frac{R}{2} = \frac{\pi R}{4}$. (4)

$$OB = R. \tag{5}$$

Подставляя (2), (3), (4) и (5) в (1), получим:

$$P = R\left(\frac{5\pi}{12} + \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right).$$

Площадь S трапеции найдем как

$$S = S_{\text{сект. } BOM} + S_{\triangle MOO_1} - S_{\text{сект. } OO_1N}.$$

Находим последовательно:

$$S_{\text{сект. } BOM} = \frac{1}{12}\pi R^2; \quad S_{\triangle MOO_1} = \frac{R^2\sqrt{3}}{8}.$$

$$S_{\text{сект } NOO_1} = \frac{\pi R^2}{16}.$$

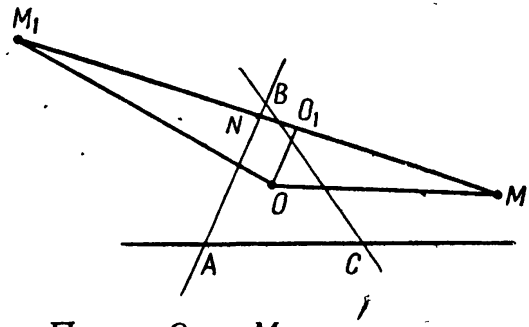
$$S = R^2\left(\frac{\sqrt{3}}{8} + \frac{\pi}{48}\right).$$

30. Покажем, что после проведения k-й прямой на плоскости число частей увеличивается на k.

Пусть на плоскости уже проведены k прямых общего положения. Проведем $(k+1)$-ю прямую. $(k+1)$-я прямая пересекается с уже имеющимися k прямыми в k точках, которые делят ее на $k+1$ частей. Следовательно, $(k+1)$-я прямая рассечет ровно $k+1$ частей из всех имевшихся ранее частей плоскости. Так как каждая из этих частей разбивается на две части, то после проведения $(k+1)$-й прямой общее число частей увеличивается на $(k+1)$. Отсюда вытекает, что l прямых общего положения разбивают плоскости на

$$2+2+3+\ldots+l = 1 + \frac{l(l+1)}{2} = \frac{l^2+l+2}{2} \text{ частей.}$$

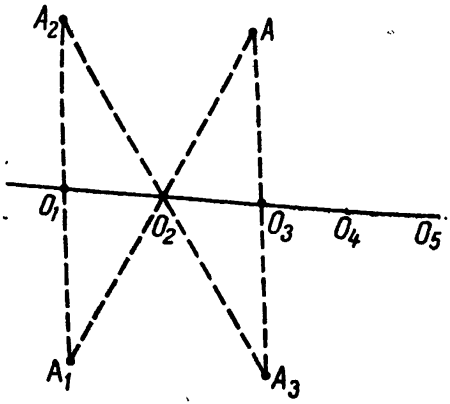
31. Можно доказать, что любые две оси симметрии пересекаются внутри многоугольника. Покажем, что третья ось симметрии пройдет через точку пересечения двух данных. Для доказательства предположим противное. Тогда три оси симметрии образуют некоторый треугольник ABC. Выберем внутри треугольника ABC произвольную точку O. Любая точка M плоскости лежит, очевидно, по ту же сторону, что и O, по крайней мере от одной из осей симметрии. Соединим точку O с наиболее удаленной от нее точкой M многоугольника. Пусть O и M лежат по одну сторону от оси AB. Точка M_1, симметричная M относительно AB, также принадлежит многоугольнику. Пусть OO_1 — перпендикуляр, опущенный из точки O на MM_1. Ввиду симметрии точек M и M_1, $M_1N = NM$. В то же время $M_1O_1 > MO_1$, значит, $OM_1 > OM$, что противоречит тому, что M — самая далекая от O точка многоугольника. Полученное противоречие доказывает утверждение.



32. Пусть $A_1, \ldots, A_p$ — левые, а $B_1, B_2, \ldots, B_p$ — правые концы данных отрезков. Тогда любая точка A_i ($i = 1, 2, \ldots, p$) лежит левее любой точки B_j ($j = 1, \ldots, p$) или совпадает с ней. Действительно, если бы точка A_i лежала правее точки B_j, то отрезки A_jB_j и A_iB_i не имели бы общих точек. Выберем теперь среди точек A_i самую правую точку A_k, а среди B_j — самую левую точку B_l. Тогда отрезок A_kB_l принадлежит всем данным отрезкам A_iB_i ($i = 1, 2, \ldots, p$). В самом деле, точки A_k и B_l принадлежат каждому из данных отрезков, следовательно, это же верно и для отрезка A_kB_l. Нетрудно убедиться в том, что точки A_k и B_l могут совпадать, тогда отрезок A_kB_l превращается в точку.

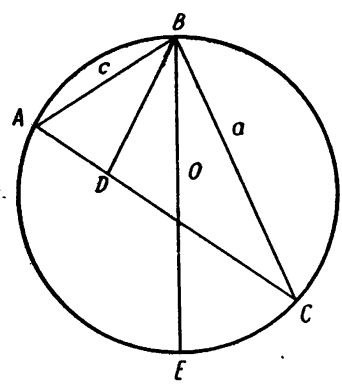
33. Пусть фигура имеет два центра симметрии O_1 и O_2. Отразим точку O_1 симметрично относительно O_2 и покажем, что полученная точка O_3 также будет центром симметрии. Пусть A — произвольная точка фигуры. Тогда точка A_1, симметричная A относительно O_2, также принадлежит фигуре, ибо O_2 — центр симметрии. По той же причине принадлежат фигуре точка A_2, симметричная A_1 относительно O_1,

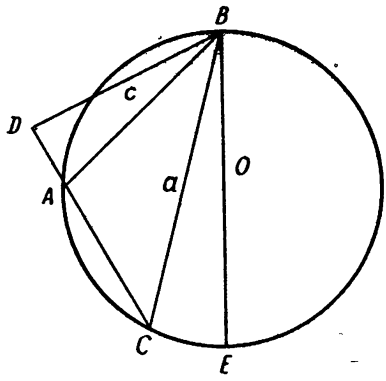
и точка A_3, симметричная A_2 относительно O_2. Легко видеть, что отрезок AO_3 равен и параллелен отрезку A_1O_1, а значит, и отрезку A_2O_1. Но A_3O_3 равно и параллельно O_1A_2, следовательно, $AO_3 = O_3A_3$ и точки A, O_3, A_3 лежат на одной прямой. А это значит, что точка A_3, симметричная точке A относительно O_3, принадлежит нашей фигуре, т. е. O_3 — центр симметрии. Аналогичным образом можно построить центры симметрии O_4, O_5 и т. д.



34. Из точки B проведем диаметр BE. Он расположится или между хордами AB и BC или по одну сторону от них. (Будем рассматривать оба случая совместно.) Проведем высоту $BD = h$. Из $\triangle ABC$ имеем:

$$\sin C = \frac{c}{2R}.$$





Из $\triangle BDC$ имеем: $\sin C = \frac{h}{a}$.

Следовательно, $\frac{c}{2R} = \frac{h}{a}$; $h = \frac{ac}{2R}$. Из $\triangle BDC$:

$$DC = \sqrt{a^2 - h^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2c^2}{4R^2}} = \frac{a}{2R}\sqrt{4R^2 - c^2}.$$

Из $\triangle ADB$:

$$AD = \sqrt{c^2 - h^2} = \sqrt{c^2 - \frac{a^2c^2}{4R^2}} = \frac{c}{2R}\sqrt{4R^2 - a^2}.$$

Для 1-го и 2-го случаев соответственно имеем: $AC = DC \pm AD$. Отсюда: $AC = \frac{a\sqrt{4R^2 - c^2} \pm c\sqrt{4R^2 - a^2}}{2R}$.

Примечание: На чертежах $c < a$. В случае $c > a$ a и c поменяются в конечном выражении местами.

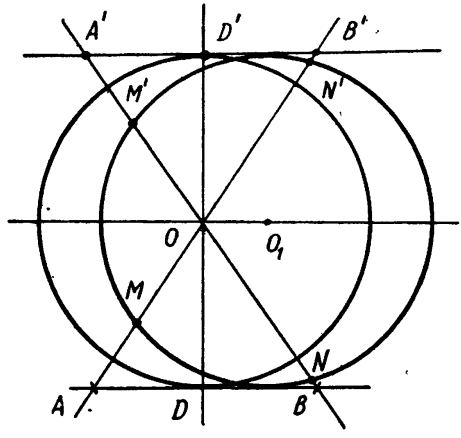
35. Пусть катеты треугольника равны a и b. Находим сумму площадей треугольника и двух полукругов, построенных на катетах.

$$S = \frac{4ab + \pi(a^2 + b^2)}{8}.$$

Находим сумму площадей искомых лунок, как разность между найденной площадью фигуры и площадью полукруга, построенного на гипотенузе, как на диаметре.

$$S - \frac{\pi(a^2 + b^2)}{8} = \frac{ab}{2}.$$

36. Через точку O проводим диаметр, параллельный стороне AB и строим $\triangle OA'B'$, симметричный треугольнику ABO относительно этой оси.



$\angle MON$ измеряется $\frac{1}{2}(\smile MN + \smile M'N')$. Так как OO_1 — ось симметрии пересекающихся окружностей, то $\smile MN = \smile M'N'$ и так как $\angle MON = 60°$, следовательно $\smile MN = 60°$.

37. Представим заданное выражение в виде $x = \sqrt{\sqrt{a^4 + b^4}}$. Под квадратным корнем находится многочлен 4-го измерения. Нужно оставить под знаком корня выражение 2-го измерения, чтобы корень оказался однородным выражением 1-го измерения:

$$x = \sqrt{a\sqrt{a^2 + \frac{b^4}{a^2}}}.$$

Строим теперь отрезок $y = \sqrt{a^2 + \left(\frac{b^2}{a}\right)^2}$, а затем отрезок $x = \sqrt{ay}$.

X КЛАСС

1. Показатель степени есть сумма натуральных чисел от 1 до $n-1$, значит,

$$2^{\frac{1}{2}n(n-1)} = 2^{1+2+3+\ldots+(n-1)} = 2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \ldots \cdot 2^{n-1}.$$

Так как $n > 2$, то $2^n > n+1$, и, следовательно,

$$2 \cdot 2^2 \cdot 2^3 \cdot \ldots \cdot 2^{n-1} > 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots n = n!$$

Значит:

$$2^{\frac{1}{2}n(n-1)} > n!$$

2. Обозначим частное от деления многочлена

$$x^{n-1} + x^{n-2}y + \ldots + y^{n-1} = F(x, y)$$

на разность $x - y$ через $Q(x, y)$.

По теореме Безу имеем:

$$F(x, y) = (x - y) \cdot Q(x, y) + n \cdot y^{n-1}.$$

Обозначим наибольший общий делитель для $F(x, y)$ и $x - y$ через D.

Тогда: $F(x, y) = kD$ и $x - y = lD$, где k и l — целые. Отсюда следует, что $D \cdot k = D \cdot l \cdot Q(x, y) + ny^{n-1}$, или

$$k = l \cdot Q(x, y) + \frac{ny^{n-1}}{D}.$$

Так как D не является делителем y (ибо в противном случае y и $x - y$ имели бы общий делитель, а следовательно, x и y также имели бы общий делитель), а $\frac{n \cdot y^{n-1}}{D}$ — целое, то D является делителем n.

3. Обозначим основание системы счисления через n, а последнюю цифру некоторого числа, записанного в этой системе, через a. Очевидно, что $a < n$, а $n > 1$.

Натуральное число, оканчивающееся цифрой a, можно записать так: $Kn + a$. Имеем: $(Kn + a)^{2k+1} = Ln + a^{2k+1}$, где K и L — натуральные числа. Согласно условию: $a^{2k+1} = Mn + a$ (M — натуральное число).

Тогда: $a^{2k+1} - a = Mn$ и $a(a^k + 1)(a^k - 1) = Mn$.
Умножим обе части этого равенства на a^{k-1}.
Получим: $a^k(a^k + 1)(a^k - 1) = Nn$ (N — натуральное число).

При любых натуральных значениях k и $a < 10$ левая часть, как произведение трех последовательных натуральных чисел, делится на 2, 3 и 6 и только на них. Следовательно, n может быть равно одному из этих трех чисел.

4. Перепишем тождество, данное в условии, в таком виде:

$$(2x - 1)^{20} = (ax + b)^{20} + (x^2 + px + q)^{10}.$$

При $x = \frac{1}{2}$ левая часть обращается в нуль. В правой части оба слагаемых всегда больше или равны 0 (все рассматриваемые числа действительны), поэтому при $x = \frac{1}{2}$ оба слагаемых должны обратиться в 0. Итак, $a \cdot \frac{1}{2} + b = 0$, откуда $a = -2b$. Теперь тождество принимает вид: $(2x - 1)^{20} = (-2bx + b)^{20} + (x^2 + px + q)^{10}$, или $(2x - 1)^{20} \cdot (1 - b^{20}) = (x^2 + px + q)^{10}$. Сравнивая коэффициенты при старшей степени в обеих частях, получим:

$$2^{20}(1 - b^{20}) = 1;\ b^{20} = 1 - \frac{1}{2^{20}};\ b = \frac{\pm\sqrt[20]{2^{20} - 1}}{2}.$$

Теперь тождество принимает вид:

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^{20} = (x^2 + px + q)^{10}.$$

Отсюда имеем:

$$x^2 + px + q = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2;\ p = -1;\ q = \frac{1}{4};$$

Ответ: $a = \sqrt[20]{2^{20} - 1}$; $b = -\frac{\sqrt[20]{2^{20} - 1}}{2}$; $p = -1$; $q = \frac{1}{4}$

или $a = -\sqrt[20]{2^{20} - 1}$; $b = \frac{\sqrt[20]{2^{20} - 1}}{2}$; $p = -1$; $q = \frac{1}{4}$.

Проверка того, что оба результата удовлетворяют требованиям задачи, не составляет труда.

5. Пусть $p > q$; p и q — нечетные.

По формуле

$$a^m - b^m = (a - b)(a^{m-1} + a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 + \ldots + b^{m-1})$$

имеем:

$$p^p - 1 = (p-1)(p^{p-1} + p^{p-2} + p^{p-3} + \ldots + 1) = \\ = (p-1)(2k+1),$$

так как $p^{p-1} + p^{p-2} + \ldots + 1$ — число нечетное.

По формуле (для нечетного m):

$a^m + b^m = (a+b)(a^{m-1} - a^{m-2}b + a^{m-3}b^2 - \ldots + b^{m-1})$

имеем:

$$q^q + 1 = (q+1)(q^{q-1} - q^{q-2} + q^{q-3} - \ldots + 1) = \\ = (q+1)(2n+1).$$

Здесь k и n — целые числа. Значит,

$$p^p + q^q = (p^p - 1) + (q^q + 1) = (p-1)(2k+1) + \\ + (q+1)(2n+1) = 2(p-1)(k+n+1) = \\ = (p-1+q+1)(k+n+1) = (p+q)(k+n+1).$$

Из этого следует, что $p^p + q^q$ делится на $p+q$.

Замечание: Сформулированное в задаче предложение имеет место и для любых нечетных натуральных p и q, таких, что $p = q+2$.

6. Докажем с помощью математической индукции. При $n = 1$ $k^{n+2} + (k+1)^{2n+1} = k^3 + (k+1)^3 = 2k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = 2k(k^2 + k + 1) + k^2 + k + 1$ делится на $k^2 + k + 1$. Пусть теперь выражение $k^{n+2} + (k+1)^{2n+1}$ делится на

$$k^2 + k + 1 \text{ при } n = m.$$

Докажем, что делимость имеет место при $n = m+1$.

Итак, $\dfrac{k^{m+2} + (k+1)^{2m+1}}{k^2 + k + 1}$ — целое число.

Тогда:

$$\frac{k^{(m+1)+2} + (k+1)^{2m+3}}{k^2 + k + 1} = \frac{k^{m+2} \cdot k + (k+1)^{2m+1} \cdot (k+1)^2}{k^2 + k + 1} = \\ = \frac{k^{m+2} \cdot k + (k+1)^{2m+1} \cdot (k^2 + 2k + 1)}{k^2 + k + 1} = \\ = \frac{k^{m+2} \cdot k + k^2(k+1)^{2m+1} + 2k(k+1)^{2m+1} + (k+1)^{2m+1}}{k^2 + k + 1} = \\ = \frac{k[k^{m+2} + (k+1)^{2m+1}] + (k+1)^{2m+1} \cdot (k^2 + k + 1)}{k^2 + k + 1} = \\ = \frac{k^{m+2} + (k+1)^{2m+1}}{k^2 + k + 1} \cdot k + (k+1)^{2m+1}$$

по предположению — целое число. Утверждение доказано.

7. Поделив данное неравенство на a^k и учитывая, что $a^k > 0$, получим следующее неравенство

$$k\left(a^k + \frac{1}{a^k} - 1 \geqslant a^{k-1} + a^{k-2} + \ldots + a^{i-k}\right), \qquad (1)$$

эквивалентное данному. Группируя окаймляющие члены в правой части полученного неравенства, приведем эту часть к виду

$$\left(a^{k-1} + \frac{1}{a^{k-1}}\right) + \left(a^{k-2} + \frac{1}{a^{k-2}}\right) + \ldots + \left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right) + \left(a + \frac{1}{a}\right) + 1.$$

Перенесем единицу из левой части неравенства (1) в правую часть и заметим, что $1 = a^0 = \frac{1}{a^0}$. Для доказательства исходного неравенства достаточно доказать следующее неравенство

$$a^k + \frac{1}{a^k} \geqslant a^{k-i} + \frac{1}{a^{k-i}}, \qquad (2)$$

справедливое при $0 \leqslant i \leqslant k$.

Действительно, рассмотрим разность:

$$a^k + \frac{1}{a^k} - a^{k-i} - \frac{1}{a^{k-i}} = a^{k-i}(a^i - 1) + \frac{1 - a^i}{a^k} = \frac{(a^i - 1)(a^{2k-i} - 1)}{a^k}.$$

Очевидно, обе круглые скобки в числителе правой части имеют один и тот же знак, как при $a > 1$, так и при $a < 1$, следовательно, (2) доказано.

8. Заметим, что числа 10 и π могут быть представлены бесконечными десятичными дробями $10 = 9{,}999\ldots9\ldots$, $\pi = a_0, a_1\ a_2\ a_3\ \ldots\ a_n$, где $a_0 = 3$, $a_1 = 1$, $a_2 = 4$, ... Убедимся, что бесконечная десятичная дробь $(9 - a_0), (9 - a_1)\,(9 - a_2)$ представляет собой число $10 - \pi$. В самом деле, сумма указанной дроби и дроби, представляющей число π, очевидно, равна дроби 9,999...9..., равной 10. Так как по условию $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{n+1}$, то

$$\lim_{n+\infty} \frac{(9 - a_0) + (9 - a_1) + \ldots + (9 - a_n)}{n+1} = 9 - \lim_{n\to\infty} \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{n+1} = 4{,}5.$$

9. В тридцатизначном числе троек из подряд стоящих цифр 28. Из цифр 1, 2 и 3 можно составить не более 27 различных трехзначных чисел. Таким образом, из 28 трехзначных чисел, по крайней мере, два равны.

10. Данный ряд чисел представляет собой разложение бинома Ньютона, если положить $x = 1$; $a = 1$; $n = 10^4$, т. е.

$$(1+1)^{10^4} = 2^{10^4} = 2^{10000}.$$

Характеристика логарифма этого числа — 3010, следовательно, число 2^{1000} имеет 3011 цифр.

11. При $n \geqslant 2$ мы имеем (пользуясь формулой бинома):

$$4^n + 15n - 1 = (3+1)^n + 15n - 1 = 3^n + 3^{n-1}C_n' + \ldots +$$
$$+ 3^2 C_n^{n-2} + 3C_n^{n-1} + 1 + 15n - 1 =$$
$$= 9(3^{n-2} + 3^{n-3}C_n^1 + \ldots + C_n^{n-2}) + 18n,$$

и оба слагаемых, очевидно, делятся на 9.

12. Докажем методом математической индукции $1^3 = 1^2$

$1^3 + 2^3 = 1 + 8 = (1+2)^2$

$1^3 + 2^3 + 3^3 = 36 = 6^2 = (1+2+3)^2$ . . . . . .

$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3 = (1+2+3+\ldots+n)^2 =$

$$= \left(\frac{1+n}{2} \cdot n\right)^2$$

$$1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 + (n+1)^3 = (1^3 + 2^3 + \ldots + n^3) +$$
$$+ (n+1)^3 = \left[\frac{(n+1)\cdot n}{2}\right]^2 + (n+1)^3 = (n+1)^2\left[\frac{n^2}{4} + n +\right.$$
$$\left. + 1\right] = (n+1)^2 \frac{n^2+4n+4}{4} = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4} =$$
$$= \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2.$$

13. Пусть a_1, a_2, $\ldots$ a_{6n} — данное число, $a_{6n}a_1a_2 \ldots a_{6n-1}$ — число, полученное перестановкой последней цифры на первое место.

Заметим, что $10^{6n} - 1$ делится на 7. Действительно, $10^3 + 1 = 1001$ делится на 7, а $10^{6n} - 1$ всегда делится при $n > 0$ на $10^3 + 1$.

Рассмотрим число $a_{6n}(10^{6n} - 1)$, которое делится на 7. Тогда

$$a_{6n}(10^{6n} - 1) + a_1a_2 \ldots a_{6n} = a_{6n}a_1a_2 \ldots a_{6n-1}0$$

также делится на 7. Отсюда, очевидно, следует, что $a_{6n}a_1a_2 \ldots a_{6n-1}$ делится на 7.

14. Пусть $k \leqslant n$, тогда $k(n-k+1) \geqslant n$.

Действительно, $kn - k^2 + k - n = n(n-1) - k(k-1) = (n-k)(k-1) \geqslant 0$. Если n — четное, то $(n!)^2$ разбивается на n сомножителей, каждый из которых не меньше, чем n, значит, $(n!)^2 \geqslant n^n$. Если же n — нечетно, то $(n!)^2$ опять разбивается на n сомножителей, $n-1$ из которых будут такого же типа, как и в четном случае, а n-й сомножитель равен $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2$. Но $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 - n = \left(\frac{n-1}{2}\right)^2 \geqslant 0$, значит, $\left(\frac{n+1}{2}\right)^2 \geqslant n$ и утверждение верно и в этом случае.

15. Имеем стороны: a; $a+r$; $a+2r$ и углы соответственно: α; $\alpha+\varphi$; $\alpha+2\varphi$.

По теореме синусов:

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{a+r}{\sin(\alpha+\varphi)} = \frac{a+2r}{\sin(\alpha+2\varphi)},$$

отсюда

$$\frac{a+(a+2r)}{\sin\alpha + \sin(\alpha+2\varphi)} = \frac{a+r}{\sin(\alpha+\varphi)} \text{ или } \frac{2(a+r)}{2\sin(\alpha+\varphi)\cos\varphi} = \frac{a+r}{\sin(\alpha+\varphi)}.$$

Отсюда $\cos\varphi = 1$; $\varphi = 0$, т. е. треугольник равноугольный, а значит равносторонний.

16. Напишем ряд тождеств:

$$\operatorname{tg} y - \operatorname{tg} x = \frac{\sin(y-x)}{\cos x \cdot \cos y} = \frac{\sin r}{\cos x \cdot \cos y};$$

$$\operatorname{tg} z - \operatorname{tg} y = \frac{\sin(z-y)}{\cos y \cdot \cos z} = \frac{\sin r}{\cos y \cdot \cos z};$$

$$\operatorname{tg} u - \operatorname{tg} t = \frac{\sin(u-t)}{\cos t \cdot \cos u} = \frac{\sin r}{\cos t \cdot \cos u};$$

$$\operatorname{tg} v - \operatorname{tg} u = \frac{\sin(v-u)}{\cos u \cdot \cos v} = \frac{\sin r}{\cos u \cdot \cos v}.$$

Сложив левые и правые части, получим:

$$\operatorname{tg} v - \operatorname{tg} x = \sin r \left(\frac{1}{\cos x \cdot \cos y} + \frac{1}{\cos y \cdot \cos z} + \ldots + \frac{1}{\cos u \cdot \cos v} \right).$$

Отсюда:

$$\frac{1}{\cos x \cdot \cos y} + \frac{1}{\cos y \cdot \cos z} + \ldots + \frac{1}{\cos u \cdot \cos v} = \frac{\operatorname{tg} v - \operatorname{tg} x}{\sin r} = \frac{\sin(v-x)}{\cos v \cdot \cos x \cdot \sin r}.$$

17. По условию задачи $2b^2 = a^2 + c^2$.

Поэтому $m_a^2 = \frac{2b^2 + 2c^2 - a^2}{4} = \frac{3}{4}c^2$; $m_b^2 = \frac{2a^2 + 2c^2 - b^2}{4} =$

$$= \frac{3}{4}b^2; \quad m_c^2 = \frac{2a^2 + 2b^2 - c^2}{4} = \frac{3}{4}a^2.$$

Отсюда $m_a : m_b : m_c = c : b : a$.

18. Пусть $a < b < c$, тогда $h_c < h_b < h_a$.

Нужно доказать, что $a : b : c = h_c : h_b : h_a = \frac{2S}{c} : \frac{2S}{b} : \frac{2S}{a} =$

$= \frac{1}{c} : \frac{1}{b} : \frac{1}{a}$, или что $\frac{a}{b^2} : \frac{1}{b} : \frac{c}{b^2} = \frac{1}{c} : \frac{1}{b} : \frac{1}{a}$.

Но по условию $b^2 = ac$. Значит, действительно,

$$\frac{a}{b^2} : \frac{1}{b} : \frac{c}{b^2} = \frac{a}{ac} : \frac{1}{b} : \frac{c}{ac} = \frac{1}{c} : \frac{1}{b} : \frac{1}{a}.$$

19. Очевидно, что $S_1 = x_1 + x_2$, $S_2 = x_1 + x_3$. $S_9 = x_3 +$ $+ x_5$, $S_{10} = x_4 + x_5$. Каждое x_i $(i = 1, 2, \ldots, 5)$ входит точно в четыре суммы S_j, следовательно, $S = S_1 + S_2 +$ $+ \ldots + S_{10} = 4(x_1 + x_2 + \ldots + x_5)$. Из выражений для S_1, S_2, S_{10}, S легко находим $x_1 = S_1 + S_2 + S_{10} - \frac{S}{4}$. Аналогично из выражений для S_2, S_{10}, S находим $x_2 = \frac{S}{4} -$ $- S_2 - S_{10}$.

Точно также находятся

$$x_3 = \frac{S}{4} - S_1 - S_{10}; \quad x_4 = \frac{S}{4} - S_1 - S_9,$$

$$x_5 = S_1 + S_9 + S_{10} - \frac{S}{4}.$$

20. Рассмотрим выражение $\sum_{i=1}^{n}(a_i x + b_i)^2$, являющееся квадратным трехчленом $Ax^2 + 2Bx + C$, где $A = \sum_{i=1}^{n} a_i^2$, $B = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$, $C = \sum_{i=1}^{n} b_i^2$. При всех действительных значениях x этот трехчлен принимает неотрицательное значение, следовательно, его дискриминант $B^2 - AC \leqslant 0$, т. е.

$$\left(\sum a_i b_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2.$$

21. Покажем сначала, что никакие три числа $b < c < d$, записанные в троичной системе цифрами 0 и 1, не образуют арифметической прогрессии. Действительно, число $b + d$ имеет в записи цифру 1, а число $2c$ записывается лишь цифрами 0 и 2, так что равенство $b + d = 2c$ невозможно. Далее, если $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k$ — члены данной последовательности, первые k из которых записываются цифрами 0 и 1, то любое число, записываемое нулями и единицами и не превосходящее a_k, является членом последовательности (это есть следствие условия минимальности). Покажем, наконец, что все члены последовательности выражаются числами, записываемыми в троичной системе цифрами 0 и 1. В самом деле, утверждение справедливо для a_0 и a_1. Пусть оно справедливо для $a_0, a_1, a_2 \ldots a_k$. Если в троичную запись числа a_k входит цифра 2, то число b, получающееся из a_k после замены всех цифр 2 цифрой 0, в силу сказанного выше, совпадает с одним из

$$a_i (i = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots\ a_{k-1}).$$

Число $a_i + a_k$ записывается лишь нулями и двойками, и, следовательно, $a_1 + a_k = 2c$, где c — число, записываемое нулями и единицами. Так как $a_i < a_k$, то $c < a_k$ и поэтому $c = a_j (j < k)$. Равенство $a_i + a_k = 2a_j$ показывает, что числа a_i, a_j и a_k образуют арифметическую прогрессию. Полученное противоречие доказывает справедливость утверждения задачи.

22. Пусть разность прогрессии равна d и один из ее членов $-a = m^2$, где m — натуральное число. Тогда число $(m + d)^2 = m^2 + 2md + d^2 = a + d(2m + d)$ является членом прогрессии (так как оно имеет вид $a + nd$, (n — целое) и вообще число $(m + kd)^2 = m^2 + 2kmd + k^2d^2 = a + d(2km + k^2)$ является членом прогрессии при любом k. Мы указали тем самым бесконечное количество членов прогрессии, являющихся точными квадратами.

23. Допустим противное: пусть $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ являются членами некоторой арифметической прогрессии, тогда

$$\sqrt{3} - \sqrt{2} = md,\ \sqrt{5} - \sqrt{2} = nd$$

(d — разность прогрессии, m и n — целые числа), откуда:

$$m(\sqrt{5} - \sqrt{2}) = n(\sqrt{3} - \sqrt{2});$$
$$m\sqrt{5} - n\sqrt{3} = (m - n)\sqrt{2}.$$

Возводим обе части равенства в квадрат:

$5m^2 + 3n^2 - 2mn\sqrt{15} = 2(m-n)^2$, и, следовательно, $\sqrt{15} = \frac{5m^2 + 3n^2 - 2(m-n)^2}{2mn}$, а это невозможно, так как $\sqrt{15}$ есть число иррациональное.

24. Для того чтобы плот мог находиться в канале, по крайней мере одна из его сторон не должна превосходить h. Если и другая его сторона не превосходит h, то в этом случае максимальная площадь h^2 будет у квадратного плота со стороной h. Такой плот, очевидно, может пройти по каналу. Если вторая сторона плота больше h, то, проходя поворот, плот сам может повернуться и в некоторый момент его стороны должны образовать угол в 45° с берегами канала. При этом плот должен находиться внутри равнобедренного, прямоугольного треугольника ABC. Если плот имеет максимальную площадь, то две его вершины должны находиться на катетах, а одна из сторон на гипотенузе. В противном случае мы сможем увеличить его площадь за счет удлинения его сторон. Обозначим одну из его сторон через a, а другую, лежащую на гипотенузе, через b. Тогда $S = ab$. Заметим, что $AC = 2h\sqrt{2} = 2a + b$. Тогда $S = a(2h\sqrt{2} - 2a) = 2(ah\sqrt{2} - a^2) = 2\left[\frac{h^2}{2} - \left(\frac{h^2}{2} - ah\sqrt{2} + a^2\right)\right] = 2\left[\frac{h^2}{2} - \left(\frac{h}{\sqrt{2}} - a\right)^2\right]$. Отсюда S максимально при $a = \frac{h}{\sqrt{2}}$. При этом $b = 2h\sqrt{2} - 2a = h\sqrt{2}$. $S = h^2$. Этот плот можно повернуть внутри канала вокруг точки O — вершины угла канала, так как он находится внутри окружности радиуса h с центром в точке O.

25. Пусть $\log_y x = z$. Имеем: $\log_{xy} x = \frac{\log_y x}{\log_y (xy)} = \frac{\log_y x}{\log_y x + 1} = \frac{z}{z+1}$, $\log_{yx^2} x = \frac{z}{1+2z}$, $\log_{yx^3} x = \frac{z}{1+3z}$. По условию задачи $z + \frac{z}{1+z} = \frac{z}{1+2z} + \frac{z}{1+3z}$, или после упрощения

$$3z^2 + 6z + 2 = 0,$$

откуда

$$z = \frac{-3 \pm \sqrt{3}}{3}.$$

26. Воспользуемся формулой $\log_B A = \frac{1}{\log_A B}$.

$$\log_a N \cdot \log_b N + \log_b N \cdot \log_c N + \log_c N \cdot \log_a N =$$
$$= \frac{1}{\log_N a} \cdot \frac{1}{\log_N b} + \frac{1}{\log_N b} \cdot \frac{1}{\log_N c} + \frac{1}{\log_N c} \cdot \frac{1}{\log_N a} =$$
$$+ \frac{\log_N c + \log_N a + \log_N b}{\log_N a \cdot \log_N b \cdot \log_N c} = \frac{\log_N (abc)}{\log_N a \cdot \log_N b \cdot \log_N c} =$$
$$= \frac{\frac{1}{\log_{acb} N}}{\frac{1}{\log_a N} \cdot \frac{1}{\log_b N} \cdot \frac{1}{\log_c N}} = \frac{\log_a N \cdot \log_b N \cdot \log_c N}{\log_{abc} N}.$$

27. Разделим все члены неравенства на 10^x. Получим

$$\left(\frac{2}{5}\right)^x - 2\left(\frac{5}{2}\right)^x < 1.$$

Положив $\left(\frac{2}{5}\right)^x = y > 0$, получим неравенство $y - \frac{2}{y} < 1$, или $y^2 - y - 2 < 0$. Отсюда: $(y+1)(y-2) < 0$, а так как $(y+1) > 0$, то разделив на $y+1$, найдем

$$y - 2 < 0,\ y < 2,\ \left(\frac{2}{5}\right)^x < 2,\ x > \log_{0,4} 2.$$

28. Воспользовавшись формулой $\log_b a = \frac{1}{\log_a b}$, приведем данное уравнение к такому:

$$\log_{\cos x} \sin x + \frac{1}{\log_{\cos x} \sin x} = 2 \text{ или } \log^2_{\cos x} \sin x -$$
$$- 2 \log_{\cos x} \sin x + 1 = 0.$$

Отсюда:

$$(\log_{\cos x} \sin x - 1)^2 = 0,\ \log_{\cos x} \sin x = 1.\ \sin x =$$
$$= \cos x,\ \operatorname{tg} x = 1,\ x = 2k\pi + \frac{\pi}{4}.$$

Здесь нельзя написать $x = k\pi + \frac{\pi}{4}$, так как при $k = 2n+1$ будет $\sin x < 0$ и $\cos x < 0$, а этого не должно быть, потому что $\cos x$ и $\sin x$ являются основаниями логарифмов и не могут быть отрицательными.

29. $\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\sqrt{5\sqrt{3\ldots}}}}} =$

$$= 3^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{8}} \cdot 5^{\frac{1}{16}} \ldots = 3^{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^{2n+1}} + \ldots} \times$$

$$\times 5^{\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^n}+\ldots}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+\ldots+\frac{1}{2^{2n+1}}+\ldots\right)=\frac{2}{3},$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4^2}+\ldots+\frac{1}{4^n}+\ldots\right)=\frac{1}{3}.$$

Отсюда: $3^{\frac{2}{3}}\cdot 5^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{3^2\cdot 5}=\sqrt[3]{45}$.

30. $x>0$; $y>0$ (так как x и y — основания показательных функций)

$$\begin{cases} y\lg x = x\lg y\,(1) \\ x\lg a = y\lg b\,(2) \end{cases} \quad y = x\frac{\lg a}{\lg b}\ (3)$$

Уравнение (3) имеет положительные решения $x>0$, $y>0$ при условии $\frac{\lg a}{\lg b}>0$.

Следовательно, данная система не имеет решений, если одно из чисел a и b больше, а другое меньше 1. Будем считать, что эти числа либо оба больше 1, либо оба меньше 1, тогда $\frac{\lg a}{\lg b}>0$. Подставив y из (3) в (1) и сократив на x ($x>0$), получим $\left(\frac{\lg a}{\lg b}-1\right)\lg x=\lg\frac{\lg a}{\lg b}$. (4) Если $\lg a\neq\lg b$, т. е. если $a\neq b$, то из уравнения (4) находим x, а затем из уравнения (3) — y. Если $a=b$, то (4) удовлетворяется тождественно, а исходная система примет вид: $x^y=y^x$, $a^x=a^y$, откуда $x=y$.

Ответ: $x=\left(\frac{\lg b}{\lg a}\right)^{\frac{\lg b}{\lg b-\lg a}}$, $y=\left(\frac{\lg b}{\lg a}\right)^{\frac{\lg a}{\lg b-\lg a}}$, если a и b (оба) больше, либо меньше 1 и $a\neq b$: $y=x$, где x любое положительное число, если $a=b$. Система противоречива, если одно из чисел a и b больше, а другое меньше 1.

31. Обозначим $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=x$. Тогда $x^3=14-3x$. Отсюда: $x^3+3x-14=0$.

$(x^3-8)+(3x-6)=(x-2)(x^2+2x+4)+3(x-2)=$
$=(x-2)(x^2+2x+7)=0$. $x_1=2$, $x_{2,3}$ — комплексные числа. Значит, $x=2$.

Ответ: $\sqrt[3]{5\sqrt{2}+7}-\sqrt[3]{5\sqrt{2}-7}=2$.

32. Легко видеть, что $\left(\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^x = \dfrac{1}{\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x}$.

Обозначим $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}\right)^x = y$, тогда получим уравнение $y^2 - 8y + 1 = 0$, из которого находим $y = 4 \pm \sqrt{15}$.

Ответ: $x = \dfrac{\log 4 \pm \sqrt{15}}{\log \sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

33. Из пропорций: $\lg y = \dfrac{y(x+z-y)}{x(y+z-x)} \lg x$,

$$\lg z = \frac{z(x+y-z)}{x(y+z-x)} \lg x.$$

Прологарифмировав $x^y y^x = z^y y^z = x^z z^x$, получаем

$$y \lg x + x \lg y = y \lg z + z \lg y = z \lg x + x \lg z.$$

Подставим в последнее значения $\lg y$ и $\lg z$.

$$y \lg x + \frac{xy(z+x-y)}{x(y+z-x)} \lg x = \frac{yz(x+y-z)}{x(y+z-x)} \lg x +$$

$$+ \frac{zy(z+x-y)}{x(y+z-x)} \lg x = z \lg x + \frac{xz(x+y-z)}{x(y+z-x)} \lg x;$$

$$\frac{\lg x}{x(y+z-x)} 2xyz = \frac{\lg x}{x(y+z-x)} 2xyz = \frac{\lg x}{x(y+z-x)} 2xyz.$$

34. Данное уравнение равносильно следующей смешанной системе:

$$\begin{cases} (x^2 - 10x + 15)(x^2 - 8x + 15) = 3x(x^2 - 6x + 15); \\ x^2 - 6x + 15 \neq 0; \\ x^2 - 8x + 15 \neq 0. \end{cases}$$

После преобразований уравнения этой системы получим:

$$x^4 - 21x^3 + 128x^2 - 315x + 225 = 0;$$

$$x^4 - 7x^3 - 14x^3 + 15x^2 + 98x^2 + 15x^2 - 210x - 105x + 225 = 0;$$

$$x^2(x^2 - 7x + 15) - 14x(x^2 - 7x + 15) + 15(x^2 - 7x + 15) = 0;$$

$$(x^2 - 7x + 15)(x^2 - 14x + 15) = 0.$$

Ответ: $x_1 = \dfrac{7 + i\sqrt{11}}{2}$; $x_3 = 7 + \sqrt{34}$;

$$x_2 = \frac{7 - i\sqrt{11}}{2}; \quad x_4 = 7 - \sqrt{34}.$$

35. Пусть $x = a + bi$; $y = c + di$. Тогда $|x+y|^2 + |x-y|^2 = |(a+c)+(b+d)i|^2 + |(a-c)+(b-d)i|^2 = (a+c)^2 + (b+d)^2 + (a-c)^2 + (b-d)^2 = 2[(a^2+b^2)+(c^2+d^2)] = 2(|x|^2+|y|^2)$.

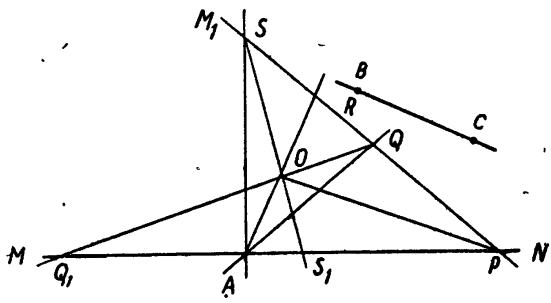
36. Обозначим отрезки $a = BC$, $b = CA$, $c = AB$ и A_2, B_2, C_2 — соответственно середины сторон BC, CA, AB. Имеем векторы $\vec{AA_1} = \vec{c} + \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{A_2A_1}$; $\vec{BB_1} = \vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b} + \vec{B_2B_1}$; $\vec{CC_1} = \vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c} + \vec{C_2C_1}$; $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$ и $\vec{A_2A_1} + \vec{B_2B_1} + \vec{C_2C_1} = 0$, так как отрезки A_2A_1, B_2B_1, C_2C_1 могут быть сторонами треугольника, полученного из треугольника A_2B_2C после поворота его на 90°. Следовательно,

$$\vec{AA_1} + \vec{BB_1} + \vec{CC_1} = 0,$$

что и требовалось доказать.

37. Возьмем две точки A и B из данных n точек, расстояние между которыми — наибольшее, и положим на плоскость два круга радиуса 1 с центром в точках A и B соответственно. Тогда любая из данных n точек попадет, по крайней мере, в один из двух кругов. Действительно, если C — одна из данных n точек, то и AC и BC не превосходят длины отрезка AB, значит, либо AC, либо BC имеет длину, не превосходящую 1.

38. Предположим противное, т. е., что существуют три точки A, B и C из числа данных n точек, не лежащие на одной прямой. Проведем через точку A прямую MN, не содержащую, кроме A, других точек из числа данных и не параллельную прямой BC. Проведем все прямые, соединяющие попарно заданные n точек. Эти прямые пересекут прямую MN в ряде точек, среди которых выберем точку P, расположенную ближе всего к точке A. Пусть, далее M_1N — та из прямых, которая пересекает прямую MN в точке P. По условию задачи на прямой M_1N должны быть расположены по крайней мере три из



наших точек. Обозначим эти точки через Q, R, S. Воспользуемся теперь тем, что на прямой AR, кроме точек A и R, обязательно должна быть расположена еще хотя бы одна точка O из наших n точек. Рассмотрим прямые OP, OQ, OR, OS, которые пересекут прямую MN в четырех точках P, Q_1, A и S_1. Но точка S_1 расположена ближе к точке A, следовательно, мы пришли к противоречию, ибо предположили, что P есть та из точек пересечения прямых с MN, которая расположена ближе всего к A. Полученное противоречие показывает, что все n точек лежат на одной прямой.

39. Каждая точка пересечения диагоналей определяется заданием двух диагоналей, которые в ней пересекаются и которые в свою очередь определяются четырьмя вершинами многоугольника. Следовательно, искомое число не превосходит C_n^4, совпадая с ним, например, в случае выпуклого четырехугольника.

40. Докажем, что число малых треугольников вида (1, 2, 3) будет нечетным, следовательно, будет существовать по крайней мере один такой треугольник. Каждый треугольник разбиения, вершины которого занумерованы цифрами 1, 2, 3 (число таких треугольников мы обозначим через X), имеет единственную сторону, концы которой занумерованы цифрами 1, 2; каждый треугольник, вершины которого занумерованы цифрами 1, 2, 2 или цифрами 1, 1, 2 (число таких треугольников мы обозначим буквой $У$), имеет две стороны, концы которых имеют номера 1 и 2. Остальные треугольники разбиения не имеют сторон, занумерованных цифрами 1, 2. Отсюда следует, что общее число сторон треугольников, занумерованных цифрами 1, 2, равно $X+2У$, где каждый отрезок, занумерованный цифрами 1, 2, расположенный внутри основного треугольника, считается дважды, ибо он входит в качестве стороны в два треугольника, расположенных по разные стороны от этого отрезка. Каждый же из отрезков 1, 2, расположенных на сторонах основного треугольника, является стороной лишь одного из треугольников разбиения и, следовательно, учитывается один раз. Таким образом, если обозначим число отрезков 1, 2, расположенных внутри большого треугольника, через A, а число таких отрезков, расположенных на стороне 1, 2 основного треугольника, через B, то будем иметь $X+2У=2A+B$.

Отсюда вытекает, что число X является четным или нечетным одновременно с числом B, и достаточно доказать, что B — всегда нечетно. Двигаясь вдоль стороны 1, 2 основного треугольника от вершины 1 к вершине 2, после нечетного числа отрезков 1, 2 будем встречать вершины разбиения, занумерованные цифрой 2, а после четного числа таких отрезков — вершины, занумерованные цифрой 1. Но так как последняя вершина разбиения, расположенная на рассматриваемой стороне, есть вершина 2, то общее число отрезков 1, 2, находящихся на стороне 1, 2 основного треугольника, должно быть нечетным. Значит, число B, а вместе с ним и X; также нечетные числа.

41. Число n должно быть не меньше трех (ибо не все n точек лежат на одной прямой). Если $n = 3$, то утверждение очевидно: три точки, не лежащие на одной прямой, соединяются попарно точно тремя прямыми. Применим теперь метод математической индукции: предположим, что для n точек теорема уже доказана, и покажем, что в таком случае она справедлива и для $n+1$ точек. Рассмотрим все прямые, соединяющие попарно $n+1$ точек. Согласно результату задачи 38, хотя бы на одной из этих прямых должны быть расположены только две точки A_n и A_{n+1} из нашей совокупности. Если точки A_1, A_2,..., A_n расположены на одной прямой, то общее число прямых, очевидно, будет точно равно $n+1$: это будут n прямых, соединяющих точку A_{n+1} с точками A_1, A_2, ..., A_n, и прямая, на которой расположены эти последние n точек. Если же n точек A_1, A_2, ..., A_n не лежат на одной прямой, то по предположению индукции среди прямых, соединяющих попарно точки A_1, A_2, ..., A_n, будет не менее n различных. Добавим теперь сюда все прямые, соединяющие A_{n+1} с точками A_1, ..., A_n. Так как на прямой A_nA_{n+1} не расположена ни одна из точек A_1, A_2, ..., A_{n-1}, то эта прямая не содержится среди прямых, соединяющих попарно точки A_1, A_2, ..., A_n. Тем самым мы докажем, что число прямых стало не меньше $n+1$. В силу принципа индукции отсюда вытекает, что утверждение справедливо для любого числа точек.

42. $(a+b+d)^n=[(a+b)+d]^n=(a+b)^n+C_n^1(a+b)^{n-1}d+$
$+C_n^2(a+b)^{n-2}d^2+\ \ldots\ +C_n^{n-1}(a+b)\,d^{n-1}+d^n.$

В разложении по формуле бинома Ньютона каждого из

полученных членов будем иметь следующее число членов:

в члене $(a+b)^n$ будет $(n+1)$ членов разложения
» » $(a+b)^{n-1}$ » n » »
» » $(a+b)^{n-2}$ » $(n-1)$ » »
. . . . . .
» » $(a+b)^2$ » 3 » »
» » $(a+b)^1$ » 2 » »
» » $(a+b)^0$ » 1 » »

Всего членов получим:

$$(n+1)+n+(n-1)+\ldots+3+2+1.$$

Суммируя, как арифметическую прогрессию, найдем

$$S=\frac{(n+2)(n+1)}{2}.$$

43. Всего членов в разложении будет $(2n+1)$. Средний член $T_{n+1}=C_{2n}^{n}a^nx^n=\frac{2n(2n-1)(2n-2)\cdot(n+1)a^nx^n}{1\cdot2\cdot3\ldots n}$.

Умножив члены дроби на $n!$, получим $T_{n+1}=$

$$=\frac{1\cdot2\cdot3\ldots2_na^nx^n}{1\cdot2\cdot3\ldots n\cdot1\cdot2\cdot3\ldots n}.$$

Числитель содержит n четных сомножителей и n нечетных. Большее четное число равно $2n$, нечетное — $(2n-1)$.

$$T_{n+1}=\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)\cdot2\cdot4\cdot6\ldots2_na^nx^n}{1\cdot2\cdot3\ldots n\cdot1\cdot2\cdot3\ldots n}=$$
$$=\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)\cdot2^n(1\cdot2\cdot3\ldots n)a^nx^n}{1\cdot2\cdot3\ldots n\cdot1\cdot2\cdot3\ldots n}=$$
$$=\frac{1\cdot3\cdot5\ldots(2n-1)\cdot2_n\,a^nx^n}{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots n}.$$

44. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{n(n-1)}{2}\frac{1}{n^2}+\ldots+$

$$+\frac{n(n-1)\ldots(n-k)}{(k+1)!}\frac{1}{n^{k+1}}+\ldots+\frac{1}{n^n}<2+$$
$$+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\ldots+\frac{1}{2^{k+1}}+\ldots+\frac{1}{2^n}<3.$$

45. Пусть в турнире участвовало x шахматистов одного класса и $10x$ шахматистов другого класса, всего $11\,x$ чел. Число сыгранных партий, а также и количество всех очков, набранных всеми участниками, равно $\frac{11x(11x-1)}{2}$.

Так как эти очки поделены между классами в отношении 1 : 4,5, то класс с меньшим числом участников набрал

$$\frac{11x(11x-1)\cdot 2}{2\cdot 11} = x(11x-1)$$

очков, а другой — $\frac{x(11x-1)\cdot 9}{2}$ очков. Учащиеся класса с меньшим числом участников сыграли партий между собой $\frac{x(x-1)}{2}$ и $10x^2$ с шахматистами другого класса. Получим неравенство:

$$x(11x-1) \leqslant 10x^2 + \frac{x(x-1)}{2} \text{ или } x^2 \leqslant x.$$

Поскольку $x > 0$, то $x \leqslant 1$.

Так как x — целое число и больше нуля, то $x = 1$, значит класс с меньшим числом участников набрал очков: $1 \cdot (11-1) = 10$.

46. Данное равенство по формуле бинома Ньютона заменяется следующим:

$$(1-3)^{4n} = (1-5)^{2n};$$
$$(-2)^{4n} = (-4)^{2n};$$
$$[(-2)^4]^n = [(-4)^2]^n;$$
$$16^n = 16^n.$$

47. Приведем данное соотношение к целому виду:

$$\frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} = \frac{3}{a+b+c}; \quad \frac{b+c+a+b}{ab+ac+b^2+bc} = \frac{3}{a+b+c};$$
$$(a+2b+c)(a+b+c) = 3(ab+ac+b^2+bc).$$

Перемножив и приведя подобные члены, получим:

$$b^2 = a^2 + c^2 - ac. \qquad (1)$$

С другой стороны имеем:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B. \qquad (2)$$

Из сравнения (1) и (2) находим:

$$2\cos B = 1; \ \cos B = \frac{1}{2}; \ \angle B = 60°.$$

48. Делим все члены уравнения на 13:

$$2\sin^2 x^2 + \frac{12}{13}\cos 2x + \frac{5}{13}\sin 2x = 1.$$

Вводим вспомогательный угол φ равенством

$$\cos 2\varphi = \frac{12}{13},$$

тогда $\sin 2\varphi = \frac{5}{13}$, а уравнение преобразуется так:

$$2\sin^2 x^2 + \cos 2\varphi \cos 2x + \sin 2\varphi \sin 2x = 1.$$
$$2\sin^2 x^2 + \cos(2x - 2\varphi) = 1.$$
$$1 - \cos 2x^2 + \cos(2x - 2\varphi) = 1.$$
$$\cos 2x^2 - \cos(2x - 2\varphi) = 0.$$
$$2\sin(x^2 + x - \varphi)\sin(x - \varphi - x^2) = 0.$$

Получаем два уравнения:

1) $\sin(x^2 + x - \varphi) = 0.$
$x^2 + x - \varphi = k\pi.$
$x^2 + x - (\varphi + k\pi) = 0.$
$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + 4\varphi + 4k\pi}}{2}.$

2) $\sin(x - \varphi - x^2) = 0.$
$x - \varphi - x^2 = k\pi.$
$x^2 - x + \varphi + k\pi = 0.$
$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4\varphi - 4k\pi}}{2}.$

49. $\frac{\sin 2x - \cos 2x + 1}{\sin 2x + \cos 2x - 1} = \frac{2\sin x \cdot \cos x + 2\sin^2 x}{2\sin x \cdot \cos x - 2\sin^2 x} = \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x} =$
$= \frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}.$

Поэтому неравенство равносильно такому $\frac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x} > 0$ или $(1 + \operatorname{tg} x)(1 - \operatorname{tg} x) > 0$, исключая $x = k\pi$, при котором левая часть данного неравенства теряет смысл, но является решением преобразованного.

Таким образом, получаем:

$$1 - \operatorname{tg}^2 x > 0,\ \operatorname{tg}^2 x < 1,\ |\operatorname{tg} x| < 1,\ -1 < \operatorname{tg} x < 1,$$
$$k\pi - \frac{\pi}{4} < x < k\pi,\ k\pi < x < k\pi + \frac{\pi}{4};\ k = 0;\ \pm 1;\ \pm 2, \ldots$$

50. $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2};\ \cos(\alpha + \beta) =$
$= 2\cos^2\frac{\alpha + \beta}{2} - 1.$

Следовательно, заданное равенство можно преобразовать так:

$$2\cos\frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2} - 2\cos^2\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{1}{2} = 0,$$
$$\cos^2\frac{\alpha + \beta}{2} - \cos\frac{\alpha - \beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha + \beta}{2} + \frac{1}{4} = 0,$$
$$\left(\cos\frac{\alpha + \beta}{2} - \frac{1}{2}\cos\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{4}\cos^2\frac{\alpha - \beta}{2} = 0,$$

$$\left(\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}=0.$$

Но сумма квадратов вещественных чисел тогда и только тогда равна нулю, когда каждое из этих чисел равно нулю. Отсюда $\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=0$ и $\cos\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=0$. Из первого, учитывая, что α и β — углы треугольника, получим $\alpha=\beta$. Тогда, подставив $\alpha=\beta$ во второе, найдем: $\cos\alpha-\frac{1}{2}=0$, $\cos\alpha=\frac{1}{2}$, $\alpha=60°$.

Итак, $\alpha=\beta=60°$. Тогда и третий угол равен 60°, т. е. треугольник правильный.

51. $\sin\alpha=2\sin\beta\cdot\cos\gamma=\sin(\beta+\gamma)+\sin(\beta-\gamma)$, но так как α, β и γ углы треугольника, то $\sin(\beta+\gamma)=\sin\alpha$. Поэтому $\sin\alpha=\sin\alpha+\sin(\beta-\gamma)$.

Отсюда $\sin(\beta-\gamma)=0$, и так как β и γ углы треугольника, то $\gamma=\beta$, и, следовательно, $b=c$.

52. Воспользовавшись формулами, выражающими тригонометрические функции $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ через тангенс половинного аргумента, получим:

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\frac{a\,2\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}+\frac{b\left(1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}\right)}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}=$$

$$=\frac{\frac{2a^2}{b}+b\left(1-\frac{a^2}{b^2}\right)}{1+\frac{a^2}{b^2}}=\frac{\frac{a^2+b^2}{b}}{\frac{a^2+b^2}{b^2}}=b.$$

53. Предположим противное, т. е. пусть существует такое число $T\neq 0$, что $\cos\alpha(x+T)+\cos(x+T)=\cos\alpha x+\cos x$.

Положим в этом равенстве $x=0$, тогда $\cos\alpha T+\cos T=1+1$; отсюда $1-\cos\alpha T+1-\cos T=0$.

Из последнего равенства имеем: $\sin\frac{\alpha T}{2}=0$, $\sin\frac{T}{2}=0$, следовательно, $T=4k_1\pi$, $\frac{\alpha T}{2}=2k_2\pi$.

Из этих равенств получаем $\alpha\cdot 2k_1\pi=2k_2\pi$, т. е. $\alpha=\frac{k_2}{k_1}$, что противоречит иррациональности α.

Значит, $T=0$.

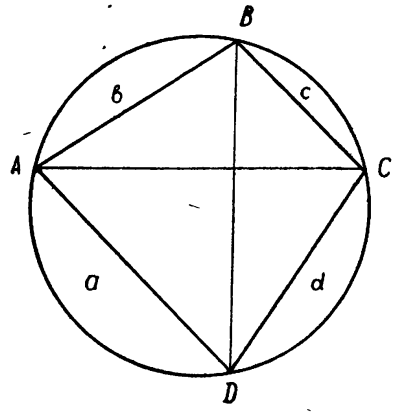
54. $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = S_{ABD} + S_{BCD}$. (1)

$S_{ABC} = \frac{1}{2} bc \cdot \sin B.$

$S_{ACD} = \frac{1}{2} ad \sin D = \frac{1}{2} ad \sin(\pi - B) = \frac{1}{2} ad \sin B.$

$S_{ABD} = \frac{1}{2} ab \sin A; \quad S_{BCD} =$

$= \frac{1}{2} cd \sin C = \frac{1}{2} cd \sin A.$



Из (1) следует, что

$$\frac{1}{2}(bc + ad) \sin B =$$

$$= \frac{1}{2} ab \sin A + \frac{1}{2} cd \sin A,$$

а отсюда:

$\sin A : \sin B = (ad + bc) : (ab + cd).$

55. Пусть α, β — острые, а γ — тупой углы треугольника. Так как $\sin^2\gamma < 1$, то для выполнения указанного в задаче неравенства достаточно показать, что $\sin^2\alpha + \sin^2\beta < 1$.

$$\alpha + \beta < 90°, \text{ значит, } \beta < 90° - \alpha.$$

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta < \sin^2\alpha + \sin^2(90° - \alpha) = \sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

56. Число корней равно числу точек пересечения графиков функций $\sin x$ и $\frac{x}{100}$. Эти точки могут лежать в промежутке: $-100 \leqslant x \leqslant 100$. На половине этого промежутка вложится периодов $\frac{100}{2\pi}$.

Ответ: 63 корня.

57. Легко проверить, что данное уравнение удовлетворяется при $\sin x = \cos x$, т. е. при $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$. Докажем, что других решений данное уравнение не имеет.

Во-первых, заметим, что $\sin x \neq 0$, $\cos x \neq 0$. Во-вторых, $\sin x$ и $\cos x$ имеют одинаковые знаки. В самом деле, переписав данное уравнение в эквивалентной форме

$$\frac{1}{\cos^m x} - \cos^n x = \frac{1}{\sin^m x} - \sin^n x,$$

заметим, что при $\cos x < 0 < \sin x$ правая часть уравнения положительна, левая — отрицательна; при $\cos x > 0 > \sin x$ — наоборот. Следовательно, $\sin x \cdot \cos x > 0$.

Если $\sin x < \cos x < 0$ или $0 < \sin x < \cos x$, то $\sin^n x < \cos^n x$ и $\frac{1}{\cos^m x} < \frac{1}{\sin^m x}$ (ибо m и n нечетные числа) и почленным сложением получаем:

$$\sin^n x + \frac{1}{\cos^m x} < \cos^n x + \frac{1}{\sin^m x}.$$

Если $\sin x > \cos x > 0$ или $0 > \sin x > \cos x$, то аналогично имеем

$$\sin^n x + \frac{1}{\cos^m x} > \cos^n x + \frac{1}{\sin^m x}.$$

Таким образом, из данного уравнения следует лишь $\sin x = \cos x$ и поэтому $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$.

58. Так как $0 < \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}$, то $\alpha > \sin\alpha$, или

$$\alpha \sin\alpha > \sin^2\alpha.$$

Также имеем, что $\cos\alpha > \cos^2\alpha$.

Сложив два этих неравенства, получим, что

$$\cos\alpha + \alpha \cdot \sin\alpha > 1.$$

59. Если человек из точки A будет идти только по полю, то он, очевидно, сможет попасть за один час в любую точку внутри круга радиуса 3 *км* с центром в точке A и не сможет попасть ни в одну точку вне этого круга. Обозначим через A_1 и A_2 точки на дороге, отстоящие от точки A на расстоянии 6 *км*. Проведем из этих точек касательные к кругу, рассмотренному выше. Докажем, что фигура, содержащаяся внутри контура, образованного отрезками касательных от точек A_1 и A_2 до точек касания с кругом и дугами окружностей, заключенными между точками касания BB_1 и CC_1, является искомым геометрическим местом. Для этого достаточно доказать, что человек, идя сначала только по дороге, а затем по полю, или только по полю сможет попасть в любую точку этой фигуры за один час и не сможет за это время попасть ни в какую точку вне указанной фигуры. Действительно, если человек, стоящий на дороге, через некоторое время сходит с нее, а затем снова возвращается на дорогу, то при этом он тратит времени больше, чем идя только по дороге. Пусть человек идет t часов по дороге со скоростью 6 *км* в час ($t \leqslant 1$) до некоторой точки M на отрезке AA_1, а оставшееся время идет по полю прямо-

линейно со скоростью 3 *км/час*, тогда через один час он окажется на окружности радиуса $3(1-t)$ *км* с центром в точке M. Покажем, что эта окружность касается прямых A_1B_1 и A_2C_1. Восстановим из точки M перпендикуляр к прямой A_1B_1 до пересечения с этой прямой в точке N. Очевидно, что достаточно показать, что $MN = 3(1-t)$ *км*. Прямоугольные треугольники AB_1A_1 и MNA_1 подобны, отсюда $\frac{AA_1}{MA_1} = \frac{AB_1}{MN}$, но $AA_1 = 6$ *км*, $MA_1 = 6(1-t)$ *км*, $AB_1 = 3$ *км*, следовательно, $MN = 3(1-t)$ *км*. Таким образом, наша окружность касается прямых A_1C_1 и A_1B_1 фигуры $A_1B_1B_2A_2C_2C_1$, что и доказывает наше утверждение.

60. Проведем радиус в точку касания N образующей BC. $ON = r$. Обозначим $BM = x$, из подобных треугольников BDC и ONB находим:

$$\frac{BD}{DC} = \frac{BN}{ON};\ DC = \frac{BD \cdot ON}{BN} = \frac{(2r+x)r}{BN}. \qquad (1)$$

По свойству касательной и секущих имеем:

$$BN^2 = BD \cdot BM = (2r+x)x,\ BN = \sqrt{(2r+x)x}. \qquad (2)$$

Подставив в (1), получим:

$$DC = \frac{(2r+x)r}{\sqrt{(2r+x)x}} = \frac{r\sqrt{2r+x}}{\sqrt{x}}. \qquad (3)$$

$$V_{\text{кон}} = \frac{1}{3}\pi DC^2 \cdot BD = \frac{\pi r^2 (2r+x)(2r+x)}{3x} =$$

$$= \frac{\pi r^2 (2r+x)^2}{3x}. \qquad (4)$$

Итак, конус будет иметь наименьший объем при наименьшем значении дроби

$$\frac{(2r+x)^2}{x} = y. \qquad (5)$$

Отсюда имеем:

$$x^2 - (y-4r)x + 4r^2 = 0.$$

$$x = \frac{(y-4r) \pm \sqrt{y(y-8r)}}{2}$$

Для того чтобы x был действительным, необходимо, чтобы y был не меньше $8r$, $y \geqslant 8r$.

Отсюда наименьшим значением для y является $8r$. При этом значении y $x = \frac{y-4r}{2} = \frac{8r-4r}{2} = 2r$, а

$$BD = x + 2r = 4r.$$

61. Обозначим ребро правильной n-угольной пирамиды через l, угол между этим ребром и плоскостью основания — через α. Объем пирамиды V_1 меньше объема V_2 описанного около нее конуса.

Для конуса имеем: $\frac{l^3}{V_2} = \frac{l^3}{\frac{1}{3}\pi l^2 \cos\alpha \cdot l \cdot \sin\alpha} =$

$= \frac{6}{\pi \cdot \cos\alpha \cdot \sin 2\alpha}$, но так как $\cos\alpha \cdot \sin 2\alpha \leqslant 1$, то $\frac{6}{\pi \cos\alpha \cdot \sin 2\alpha} >$

$> \frac{6}{\pi} > 1$.

Следовательно, тем более

$$\frac{l^3}{V_1} > 1.$$

62. Пусть многогранник имеет l ребер и m граней, причем число сторон в гранях $n_1, n_2, \ldots n_m$. Так как каждое ребро является общей стороной двух смежных граней, то ребер у многогранника в два раза меньше числа всех сторон всех его граней, т. е. $n_1 + n_2 + \ldots + n_m = 2l$.

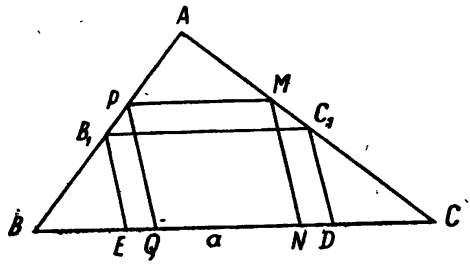
Но это равенство невозможно, если все числа $n_1, n_2, \ldots n_m$, будут нечетными и число их нечетно, так как тогда сумма таких чисел дает нечетное число, в то время как $2l$ — четное.

63. Соединив центр вписанного шара со всеми вершинами многогранника, мы разобъем многогранник на пирамиды, основаниями которых служат грани данного многогранника, все они имеют общую вершину в центре шара и высотами их являются радиусы вписанного в данный многогранник шара. Объем многогранника равен сумме объемов получившихся пирамид:

$$V = \frac{1}{3} rS_1 + \frac{1}{3} rS_2 + \frac{1}{3} rS_3 + \ldots + \frac{1}{3} rS_n =$$

$$= \frac{1}{3} r (S_1 + S_2 + S_3 + \ldots + S_n) = \frac{1}{3} rS;\ r = \frac{3V}{S}.$$

64. Пусть в треугольник ABC вписан произвольный параллелограмм $PMNQ$ с данным острым углом и параллелограмм B_1C_1DE, где B_1C_1 — средняя линия треугольника, равная $\frac{a}{2}$. Площадь параллелограмма B_1C_1DE равна $\frac{ah}{4}$, где a — сторона BC, а h — высота треугольника, опущенная на сторону BC. Площадь параллелограмма $PMNQ$ равна $\left(\frac{a}{2}-x\right)\left(\frac{h}{2}+y\right)$. Из подобия треугольников APM и AB_1C_1 имеем:

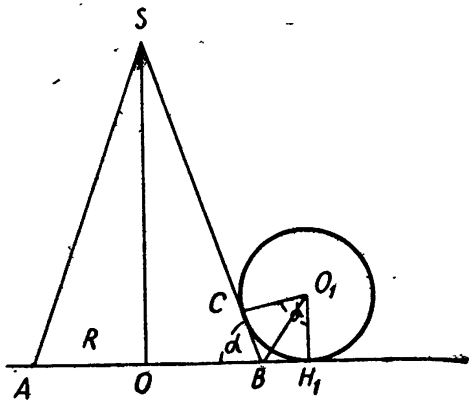


$$\frac{\frac{a}{2}-x}{\frac{h}{2}-y}=\frac{a}{h};\ \frac{a}{2}-x=\frac{a\left(\frac{h}{2}-y\right)}{h},\ S_{PMNQ}=$$

$$=\frac{a\left(\frac{h}{2}-y\right)\left(\frac{h}{2}+y\right)}{h}=\frac{ah}{4}-\frac{ay^2}{h}.$$

Значит, $S_{PMNQ}<S_{B_1C_1DE}$. Таким образом, параллелограмм B_1C_1DE является искомым.

65. Пусть $\triangle ABS$ представляет сечение конуса плоскостью, проходящей через его вершину S, высоту OS и центр O_1 одного из указанных n шаров, H_1 — проекция центра O_1 на плоскость основания конуса, x — искомый радиус. Имеем:



$$BH_1=x\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Если O_2 — центр соседнего шара и H_2 — его проекция на плоскость основания конуса, то

$$H_1H_2=2x,\ \angle H_1OH_2=\frac{360^\circ}{n},\ OH_1=OH_2=R+x\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2};$$

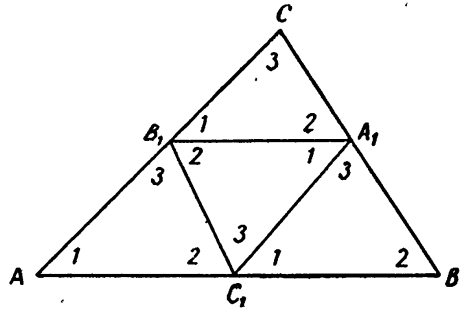
медиана $\triangle H_1OH_2$: $OM=OH_1\sin\frac{180^\circ}{n}$.

Следовательно, после простых вычислений

$$x = \frac{R}{\cos\frac{180^\circ}{n} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

66. Равны суммы всех его противоположных ребер.

67. Если бы плоскость пересекла все боковые ребра параллелепипеда и одно основание, то две стороны образовавшегося пятиугольника были бы параллельными между собой, чего нет в правильном пятиугольнике.



68. Прямые, по которым надо сгибать лист, должны проходить через середины сторон треугольника, образованного листом. Эти прямые разбивают лист на 4 равных треугольника. Треугольник должен быть остроугольным.

Доказать существование равенства.

69. Пусть S_1 — площадь $\triangle ABC$, S_2 — площадь $\triangle SAB$, S_3 — площадь $\triangle SBC$, S_4 — площадь $\triangle SAC$, V — объем шара. Имеем:

$$S_1h_1 = S_2h_2 = S_3h_3 = S_4h_4 = 3V.$$

Пользуясь этими равенствами, можем получить требуемое соотношение.

70. Расстояния от вершин основания до точек соприкосновения вписанного шара с боковыми гранями равны между собою и половине диагонали основания. Поэтому треугольник, вершины которого совпадают с концами сторон основания и с точкой прикосновения боковой грани, содержащей эту сторону, равен треугольнику с вершинами в тех же концах стороны основания и в центре основания. Вершины указанной боковой грани находятся на описанном шаре. Поэтому можно доказать, что плоский угол при вершине равен половине прямого угла.

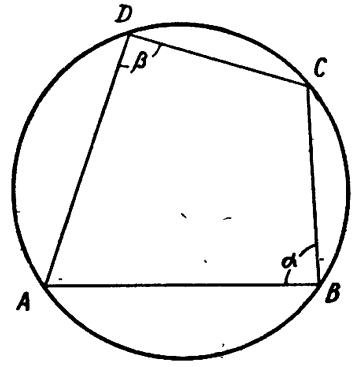
71. Пусть точки O_1, O_2, O_3 — центры данных шаров, а O_1', O_2', O_3' — точки соприкосновения этих шаров с плоскостью, точки O и O' — центр и точка соприкосновения с пло-

скостью искомого шара, x — радиус этого шара. Имеем: $\triangle O_1O_2O_3 = \triangle O_1'O_2'O_3'$; стороны этих треугольников равны $2R$. Точка O' находится в точке пересечения высот треугольника $O_1'O_2'O_3'$.

Поэтому

$$\left(\frac{2R\sqrt{3}}{3}\right)^2 = (x+R)^2 - (R-x)^2,\ x = \frac{1}{3}R.$$

72. Обозначим $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$, $\angle ABC = \alpha$, $\angle CDA = \beta$, S — площадь четырехугольника $ABCD$. Имеем:



$$2S = ab\sin\alpha + cd\cos\alpha,$$
$$4S^2 = a^2b^2 + c^2d^2 + 2abcd\sin\alpha\sin\beta - (a^2b^2\cos^2\alpha + c^2d^2\cos^2\beta),$$
$$AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha = c^2 + d^2 - 2cd\cos\beta).$$

После некоторых преобразований:

$$4S^2 = a^2b^2 + c^2d^2 - \frac{(a^2+b^2-c^2-d^2)^2}{2} - 2abcd\cos(\alpha+\beta).$$

Поэтому решению задачи соответствует условие

$$\cos(\alpha+\beta) = -1,\ \alpha+\beta = 180°.$$

73. Преобразуем левую часть уравнения:

$$\frac{25x^2+20x^3+4x^4+25x^2}{(5+2x)^2} = \frac{74}{49},$$
$$\frac{4x^4}{(5+2x)^2} + \frac{10x^2(5+2x)}{(5+2x)^2} = \frac{74}{49},$$

так как $5+2x \neq 0$.

$$\left(\frac{2x^2}{5+2x}\right)^2 + 5\cdot\frac{2x^2}{5+2x} - \frac{74}{49} = 0.$$

Имеем:

$$\frac{2x^2}{5+2x} = -\frac{37}{7};\ \frac{2x^2}{5+2x} = \frac{2}{7}.\quad x_1 = \frac{i\sqrt{1221}-37}{14};$$
$$x_2 = \frac{-i\sqrt{1221}-37}{14};\ x_3 = -\frac{5}{7};\ x_4 = 1.$$

В. Платонов, К. Арлюк, В. Зарецкий,
Н. Метельский, Л. Тутаев

Избранные задачи элементарной математики

Редактор *Шердюкова С. И.*
Худож. редактор *Валентович В. Н.*
Техредактор *Жук В. Н.*
Корректор *Кришталь В. К.*

АТ 04468. Сдано в набор 13/VII 1964 г. Подп. к печати 22/X 1964 г.
Тираж 36000 экз. Бумага 84×108/32 Печ. л. 2,875 (4,83).
Уч.-изд. л. 6,34. Изд. № 994. Заказ 358. Цена 19 коп.

Издательство «Высшая школа»
Государственного комитета Совета Министров БССР по печати
Минск, Кирова, 24.
Типография изд-ва «Звязда». Минск, Ленинский проспект, 79.